

Lineare Algebra II

Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (P)

Es sei $V = \{p \in \mathbb{R}[X] \mid \text{Grad } p \leq 2\}$ und $a, b, c \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Überzeugen Sie sich davon, dass die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$\langle p, q \rangle := p(a)q(a) + p'(b)q'(b) + p''(c)q''(c)$$

ein Skalarprodukt ist (dabei bezeichne p' bzw. p'' die erste bzw. zweite formale Ableitung von p) und bestimmen Sie den Abstand von $p := X^2 + 1$ zu $U := [1, X]$.

Aufgabe 2 (P)

Es sei $A \in \mathbf{SO}(3)$. Wir wollen zeigen, dass A ähnlich ist zu einer Matrix

$$\tilde{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Diese Darstellung heißt die *euklidische Normalform* von A .

Geometrisch bedeutet dies, dass der Eigenraum von A eine Drehachse senkrecht zu einer Ebene ist, in der A eine Drehung um den Winkel α durchführt.

1. Zeigen Sie $\tilde{A}_\alpha \in \mathbf{SO}(3)$.
2. Zeigen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass jedes reelle Polynom vom Grad 3 eine Nullstelle in \mathbb{R} besitzt.
3. Zeigen Sie, dass die Matrix A den Eigenwert 1 besitzt.
4. Folgern Sie, dass es ein $\alpha \in [0, 2\pi)$ gibt, sodass A ähnlich zu \tilde{A}_α ist.

Aufgabe 3

Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standard-Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n . Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heisst *winkeltreu*, falls $\omega(v, w) = \omega(Av, Aw)$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist. Zeigen Sie:

- a) Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ winkeltreu, dann existiert ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so dass $\langle Av, Aw \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ ist.
- b) Orthogonale Matrizen sind winkeltreu.
- c) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann winkeltreu, wenn eine orthogonale Matrix R und ein $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert mit $A = \mu R$.

Abgabe der Lösungen bis zum 02.06.2017 um 12 Uhr in den entsprechenden **gelben Briefkasten Ihres Tutoriums im Atrium des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30)**. Bitte **heften Sie Ihre Abgabe ordentlich zusammen** und **vermerken Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer** auf jedem Blatt. Jede (P)-Aufgabe wird mit **maximal 6 Punkten** bewertet.