Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Sommersemester 2017
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Dr. Moritz Gruber
M. Sc. Julia Heller

Lineare Algebra II
Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (P)

Es seien V und W euklidische Vektorräume und $\Phi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

i) Für alle $x, y \in V$ gilt: $x \perp y \Rightarrow \Phi(x) \perp \Phi(y)$.

ii) Für alle $x, y \in V$ gilt: $\|x\|_V = \|y\|_V \Rightarrow \|\Phi(x)\|_W = \|\Phi(y)\|_W$.

iii) Es gibt eine reelle Zahl $c \geq 0$, so dass für alle $x \in V$ gilt: $\|\Phi(x)\|_W = c\|x\|_V$.

iv) Entweder gibt es eine lineare Isometrie $\Psi : V \to W$ und eine reelle Zahl $c > 0$ mit $\Phi = c\,\Psi$, oder Φ ist die Nullabbildung.

Aufgabe 2 (P)

Gegeben sei die orthogonale Matrix

$$A := \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -4\sqrt{3} & 4 & 3\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} & -3 & -3\sqrt{3} & -4 \\ 4 & 3\sqrt{3} & -3 & 4\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & -4 & -4\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} \in \mathbf{O}(4)\,.$$

Bestimmen Sie die euklidische Normalform $\widetilde{A}$ von A sowie eine orthogonale Matrix $S \in \mathbf{O}(4)$, sodass $\widetilde{A} = S^{-1}AS$

Aufgabe 3

Es sei V ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum und Φ ein Endomorphismus von V.
Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Der Endomorphismus Φ ist eine selbstadjungierte Isometrie.

(ii) Es gibt eine Orthonormalbasis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von V aus Eigenvektoren von Φ und Eigenwerte $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ mit $\Phi(v_i) = \varepsilon_i v_i$ für $1 \leq i \leq n$.

(iii) Es gibt einen Untervektorraum $U \subset V$, sodaß Φ eine Spiegelung an $U^\perp$, d.h. von der Form $\Phi = \mathrm{id}_V - 2\pi_U$ ist.

Abgabe der Lösungen bis zum 16.06.2017 um 12 Uhr in den entsprechenden **gelben Briefkasten Ihres Tutoriums im Atrium des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30)**. Bitte **heften Sie Ihre Abgabe ordentlich zusammen** und **vermerken Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer** auf jedem Blatt. Jede (P)-Aufgabe wird mit **maximal 6 Punkten** bewertet.