Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Klaus Spitzmüller
Dipl.-Inform. Wolfgang Globke

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II für die Fachrichtung Informatik

Übungsblatt 1 **Sommersemester 2009**

Aufgabe 1

Geben Sie je *eine* korrekte Definition für die folgenden Begriffe an:

(a) Eigenvektor eines Endomorphismus.

(b) Ähnlichkeit zweier Matrizen.

(c) Diagonalisierbarkeit eines Endomorphismus.

(d) Lineare Abhängigkeit.

(e) Äquivalenz zweier Matrizen.

(f) Vektorraum.

(g) Dimension eines Vektorraums.

(h) Direkte Summe von drei Untervektorräumen U_1, U_2, U_3.

Aufgabe 2

Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ sei Φ_α der Endomorphismus mit Abbildungsmatrix

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} 2-\alpha & 2-3\alpha & -\alpha \\ \alpha & 3\alpha & \alpha \\ 0 & 1-\alpha & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

bezüglich der Standardbasis.

(a) Bestimmen Sie die Menge aller $\alpha \in \mathbb{R}$, für die Φ_α diagonalisierbar ist.

(b) Berechnen Sie für Φ_0 eine Basis aus Eigenvektoren.

Aufgabe 3

Fassen Sie in dieser Aufgabe $\mathbb{R}$ als Teilkörper von $\mathbb{C}$ auf.

(a) Es sei bekannt, dass ein Polynom $f \in \mathbb{C}[X]$ vom Grad k höchstens k verschiedene Nullstellen in $\mathbb{C}$ hat.

Zeigen Sie, dass i und $-\mathrm{i}$ die einzigen komplexen Zahlen sind, deren Quadrat -1 ergibt.

(b) Es sei $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Körperautomorphismus, der $\psi(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Zeigen Sie mit Hilfe von Teil (a), dass ψ eine der folgenden beiden Abbildungen sein muss:

- Entweder $\psi(z) = z$ für alle $z \in \mathbb{C}$,
- oder $\psi(z) = \overline{z}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 4

Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Weiter sei $\pi : V \to V$ eine *Projektion*, d.h. ein Endomorphismus von V, der $\pi^2 = \pi$ erfüllt.

(a) Zeigen Sie, dass für eine Projektion π gilt:

$$V = \text{Kern } \pi \ \oplus \ \text{Bild } \pi.$$

(b) Es sei B eine Basis von Kern π und C eine Basis von Bild π.
Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von π bzgl. der Basis $B \cup C$ von V.