Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Klaus Spitzmüller
Dipl.-Inform. Wolfgang Globke

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II für die Fachrichtung Informatik

Übungsblatt 2 **Sommersemester 2009**

Aufgabe 1

Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\Psi : V \to V$ ein nilpotenter Endomorphismus (d.h. es gibt ein $m \in \mathbb{N}$, so dass Ψ^m die Nullabbildung ist).

Für ein festes $v \in V\setminus\{0\}$ betrachten wir den Untervektorraum

$$U = [\Psi^n(v), \Psi^{n-1}(v), \ldots, \Psi(v), v].$$

(a) Es sei $d = \dim U$. Zeigen Sie, dass

$$B = \{\Psi^{d-1}(v), \Psi^{d-2}(v), \ldots, \Psi(v), v\}$$

eine Basis von U ist.

(b) Geben Sie die Abbildungsmatrix $\Theta_{BB}(\Psi|_U)$ an.

(c) Es sei nun C die Basis

$$C = \{v, \Psi(v), \Psi^2(v), \ldots, \Psi^{d-1}(v)\},$$

also eine Basis, die mit B als Menge übereinstimmt, aber in der die Anordnung der Basisvektoren umgekehrt ist. Wie sieht nun $\Theta_{CC}(\Psi|_U)$ aus? Geben Sie die Übergangsmatrix A_{CB} des Basiwechsels von B zu C an.

Aufgabe 2

(a) Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}.$$

Bestimmen Sie die Jordansche Normalform $\tilde{A}$ von A, und eine Matrix S, so dass $\tilde{A} = S^{-1}AS$ gilt.

(b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{C}$ die Jordansche Normalform $\tilde{B}_\alpha$ der Matrix

$$B_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & \alpha & -\alpha & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}.$$

Knobelaufgabe (keine Abgabe)

Berechnen Sie A^{100} für $A = \begin{pmatrix} 11 & -4 \\ 25 & -9 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$.

Hinweis: Überlegen Sie sich, warum diese Aufgabe auf einem Übungsblatt zur Jordanschen Normalform auftaucht.

Einwurf der Lösungen bis zum 4.5.2009, 13:00 Uhr, in einen der Briefkästen im dritten Stock des Mathematik-Gebäudes 20.30 neben dem Seminarraum S32. Jede Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet. Die Übungsblätter stehen auch unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/la2_inf2009s/

zum Download bereit.