Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Klaus Spitzmüller
Dipl.-Inform. Wolfgang Globke

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II für die Fachrichtung Informatik

Übungsblatt 3 **Sommersemester 2009**

Aufgabe 1

Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\Phi : V \to V$ ein Endomorphismus mit

$$\text{Bild } \Phi \subset \text{Kern } \Phi.$$

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $r = \text{Rang } \Phi$:

(a) Das charakteristische Polynom von Φ.

(b) Die Jordansche Normalform von Φ.

Aufgabe 2

Die *Exponentialabbildung* für komplexe Matrizen ist

$$\exp : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}, \quad A \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

Den Nachweis, dass diese Reihe für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ konvergiert, überlassen wir ruhigen Gewissens den Analytikern.

Zeigen Sie:

(a) $\exp(O) = E_n$.

(b) Aus $AB = BA$ folgt $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$.

(c) Für $S \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ gilt $\exp(SAS^{-1}) = S\exp(A)S^{-1}$.

(d) $\det(\exp(A)) = \mathrm{e}^{\mathrm{Spur}(A)}$.

Hinweis: Verwenden Sie Bemerkung 17.14 aus dem Skript.

(e) $\exp(A) \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ für alle $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Zusatzaufgabe (keine Abgabe)

Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{5\times 5}.$$

Bestimmen Sie die Jordansche Normalform $\tilde{A}$ von A, und eine Matrix S, so dass $\tilde{A} = S^{-1}AS$ gilt.

Einwurf der Lösungen bis zum 11.5.2009, 13:00 Uhr, in einen der Briefkästen im dritten Stock des Mathematik-Gebäudes 20.30 neben dem Seminarraum S32. Jede Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet. Die Übungsblätter stehen auch unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/la2_inf2009s/

zum Download bereit.