

## Lineare Algebra und Analytische Geometrie II für die Fachrichtung Informatik

### Übungsblatt 4

Sommersemester 2009

---

#### Aufgabe 1

- (a) Es seien im  $\mathbb{R}^n$  mit Standardskalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  die Abbildungen  $\pi_k$  (für  $k = 1, \dots, n$ ) definiert durch

$$\pi_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto \langle e_k, x \rangle e_k,$$

wobei  $e_k \in \mathbb{R}^n$  der  $k$ -te Einheitsvektor ist.

Zeigen Sie:

- (i)  $\pi_k$  ist eine Projektion.
  - (ii) Es gilt  $\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_n = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ .
- (b) Es sei  $A = (a_{ik}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine positiv definite symmetrische Matrix.

Zeigen Sie:

- (i) Es gilt  $a_{ik}^2 < a_{ii}a_{kk}$  für  $i \neq k$ .

*Hinweis:* Betrachten Sie den Vektor  $\xi e_i + e_k$  für beliebiges  $\xi \in \mathbb{R}$ .

- (ii) Es existiert ein  $k$  mit  $\max_{i,j} |a_{ij}| = a_{kk}$  (d.h. der betragsgrößte Matrixeintrag liegt auf der Diagonalen).

#### Aufgabe 2

Prüfen Sie, welche der folgenden Vorschriften ein euklidisches Skalarprodukt auf dem jeweiligen reellen Vektorraum definieren:

- (a) Der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\mathbb{R}^{n \times n}$  mit

$$\langle A, B \rangle = \text{Spur}(A^T \cdot B).$$

- (b) Der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\mathbb{R}^2$  mit

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}.$$

- (c) Der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $C([-1, 1])$  der stetigen Funktionen auf dem Intervall  $[-1, 1]$  mit

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)\omega(t) dt$$

für eine fest gewählte Funktion  $\omega \in C([-1, 1])$  mit  $\omega(t) > 0$  für alle  $t \in [-1, 1]$ .

- (d) Der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\mathbb{R}^3$  mit

$$\langle x, y \rangle = x^T \cdot \begin{pmatrix} 6 & \alpha & 3 \\ 0 & \beta & 0 \\ 3 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \cdot y,$$

abhängig von  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ .

*Hinweis:* Sie können Teil (b) (i) von Aufgabe 1 verwenden.

---

Einwurf der Lösungen bis zum 18.5.2009, 13:00 Uhr, in einen der Briefkästen im dritten Stock des Mathematik-Gebäudes 20.30 neben dem Seminarraum S32. Jede Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet. Die Übungsblätter stehen auch unter

[http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/la2\\_inf2009s/](http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/la2_inf2009s/)  
zum Download bereit.