Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Klaus Spitzmüller
Dipl.-Inform. Wolfgang Globke

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II für die Fachrichtung Informatik

Übungsblatt 5 **Sommersemester 2009**

Aufgabe 1

Es sei V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, und es seien $b_1, \ldots, b_k$ orthonormale Vektoren aus V.

Zeigen Sie:

(a) $\langle x+y, x-y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$ für alle $x, y \in V$.

(b) $\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\langle x, y \rangle$ für alle $x, y \in V$.

(c) *Besselsche Ungleichung*: Für alle $x \in V$ gilt

$$\sum_{i=1}^{k} \langle x, b_i \rangle^2 \leq \|x\|^2.$$

(d) *Parsevalsche Gleichung*: In (c) gilt genau dann Gleichheit, wenn $x = \sum_{i=1}^{k} \langle x, b_i \rangle b_i$ ist.

Aufgabe 2

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann symmetrisch und positiv definit, wenn

$$A = S^\top S$$

gilt für ein $S \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$.

Bemerkung: Sie dürfen bei dieser Aufgabe voraussetzen, dass für jedes Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ eine Orthonormalbasis existiert.

Gummibärchenaufgabe

(a) Zeigen Sie:

Die Matrix S kann in Aufgabe 2 als obere Dreiecksmatrix mit positiven Diagonaleinträgen gewählt werden.

(b) Schreiben Sie einen mindestens halbseitigen Aufsatz zum Thema *„Wie die Cholesky-Zerlegung mein Leben verändert hat"*.

Die Bearbeitung dieser Aufgabe wird nicht mit Punkten belohnt. Stattdessen erhalten Sie eine von der Güte der Lösung abhängige Anzahl Gummibärchen in Ihrem jeweiligen Tutorium ausgehändigt.

Einwurf der Lösungen bis zum 25.5.2009, 13:00 Uhr, in einen der Briefkästen im dritten Stock des Mathematik-Gebäudes 20.30 neben dem Seminarraum S32. Jede Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet. Die Übungsblätter stehen auch unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/la2_inf2009s/

zum Download bereit.