Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Klaus Spitzmüller
Dipl.-Inform. Wolfgang Globke

# Lineare Algebra und Analytische Geometrie II für die Fachrichtung Informatik

**Übungsblatt 6** **Sommersemester 2009**

---

## Aufgabe 1

(a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des folgenden Untervektorraums des $\mathbb{R}^5$ (mit Standardskalarprodukt):

$$\left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \subset \mathbb{R}^5.$$

(b) Ergänzen Sie die in Teil (a) gefundene Orthonormalbasis zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^5$.

(c) Gegeben sei der $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \deg f \leq 2\}$ versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = 2 \int_0^1 x f(x) g(x) \mathrm{d}x.$$

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $V$.

(d) Bestimmen Sie im euklidischen Vektorraum $V$ aus Teil (c) den Abstand des Polynoms $X^2$ zu dem Untervektorraum $U = [1, X]$.

## Aufgabe 2

Es sei $A = (a_1 \; \dots \; a_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ die Matrix mit Spaltenvektoren $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$.

Weiter sei $U = [a_1, \dots, a_n]$ der von den $a_i$ aufgespannte Untervektorraum von $\mathbb{R}^m$.

$\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ seien mit dem jeweiligen Standardskalarprodukt versehen.

Zeigen Sie:

(a) $v \in \mathbb{R}^m$ liegt genau dann in $U^\perp$, wenn $A^\top v = 0$ ist.

(b) Für alle $b \in \mathbb{R}^m$ existiert ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit den folgenden Eigenschaften:

  (i) $A^\top A x = A^\top b$.

  (ii) Für alle $y \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|Ax - b\| \leq \|Ay - b\|$.

*Hinweis:* Versuchen Sie die Aussagen in dieser Aufgabe geometrisch zu deuten.

---

Einwurf der Lösungen bis zum 2.6.2009, 13:00 Uhr, in einen der Briefkästen im dritten Stock des Mathematik-Gebäudes 20.30 neben dem Seminarraum S32. Jede Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet. Die Übungsblätter stehen auch unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/la2_inf2009s/

zum Download bereit.