Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Klaus Spitzmüller
Dipl.-Inform. Wolfgang Globke

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II für die Fachrichtung Informatik

Übungsblatt 7 **Sommersemester 2009**

Aufgabe 1

Es sei $A \in \mathbf{SO}(3)$. Wir wollen zeigen, dass A ähnlich ist zu einer Matrix

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Diese Darstellung heißt die *euklidische Normalform* von A.

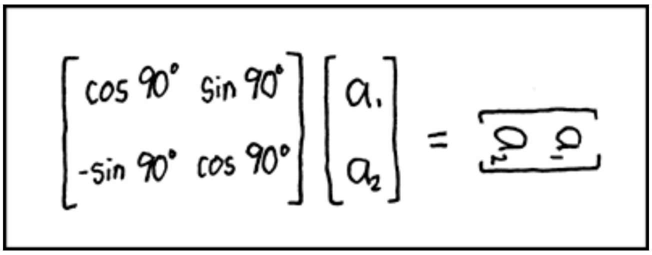
Geometrisch bedeutet dies, dass der Eigenraum von A ein Drehachse senkrecht zu einer Ebene ist, in der A eine Drehung um den Winkel α durchführt.

(a) Zeigen Sie $\tilde{A} \in \mathbf{SO}(3)$.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass jedes reelle Polynom vom Grad 3 eine Nullstelle in $\mathbb{R}$ besitzt.

(c) Zeigen Sie, dass die Matrix A den Eigenwert 1 besitzt.

(d) Folgern Sie schließlich, dass A ähnlich zu der angegebenen Matrix $\tilde{A}$ ist (für ein geeignetes α).



www.xkcd.com

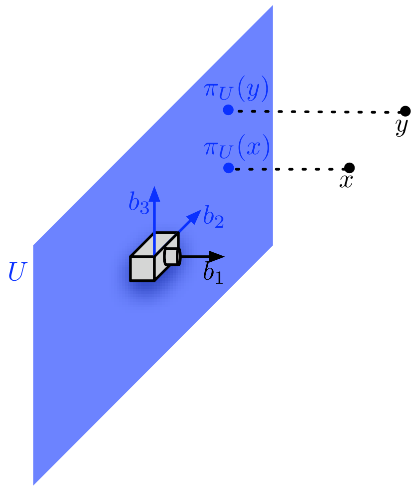
Aufgabe 2

Es seien b_1, b_2, b_3 die Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^3$.

Eine Kamera sei im $\mathbb{R}^3$ so aufgestellt, dass die Linse in Richtung b_1 zeigt, und die Bildebene U steht senkrecht dazu (sie wird also von b_2 und b_3 aufgespannt).

Das Kamerabild eines Objekts an einer Stelle $v \in \mathbb{R}^3$ sei durch die Orthogonalprojektion $\pi_U(v)$ auf die Bildebene U gegeben.

Es seien die Punkte $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^3$ gegeben.



Wir wollen die Kamera so drehen, dass das Kamerabild von x und y identisch ist.

(a) Bestimmen Sie eine neue Bildebene W, so dass $\pi_W(x) = \pi_W(y)$ gilt.

Hinweis: Die neue Bildebene muss senkrecht auf einer Geraden durch x und y stehen.

(b) Bestimmen Sie den Winkel α zwischen der alten Bildebene U und der neuen Bildebene W (d.h. den Winkel zischen ihren jeweiligen Normalenvektoren).

(c) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis der Drehebene und der Drehachse für eine Drehung, die U in W überführt.

Geben Sie die euklidische Normalform $\tilde{A}$ dieser Drehung an (vgl. Aufgabe 1).

(d) Geben Sie eine Matrix $A \in \mathbf{SO}(3)$ an, die die Drehung aus Teil (c) bzgl. der Standardbasis $\{b_1, b_2, b_3\}$ realisiert, d.h. es soll $A \cdot U = W$ gelten.

Einwurf der Lösungen bis zum 8.6.2009, 13:00 Uhr, in einen der Briefkästen im dritten Stock des Mathematik-Gebäudes 20.30 neben dem Seminarraum S32. Jede Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet. Die Übungsblätter stehen auch unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/la2_inf2009s/

zum Download bereit.