Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Klaus Spitzmüller
Dipl.-Inform. Wolfgang Globke

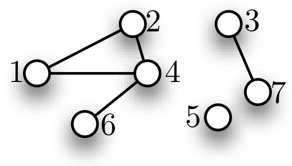
Lineare Algebra und Analytische Geometrie II für die Fachrichtung Informatik

Übungsblatt 8 **Sommersemester 2009**

Aufgabe 1

Aus der Informatik kennen Sie einen *Graphen* $\mathfrak{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ als eine Menge von Knoten $i \in \mathcal{V}$, von denen gewisse Knotenpaare durch Kanten $(i, j) \in \mathcal{E}$ verbunden sind.

Als eine *zusammenhängende Komponente* eines Graphen $\mathfrak{G}$ bezeichnen wir einen Teilgraphen $\mathfrak{H}$, in dem jeder Knoten von $\mathfrak{H}$ durch einen Pfad mit jedem anderen Knoten von $\mathfrak{H}$ verbunden ist, und zugleich mit keinem Knoten außerhalb von $\mathfrak{H}$ verbunden ist. So hat z.B. der folgende Graph drei Zusammenhangskomponenten:



Es sei nun $\mathfrak{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ ein endlicher, ungerichteter Graph ohne Ohren (d.h. $|\mathcal{V}| = \nu$ und $|\mathcal{E}| = \varepsilon$ sind endlich, aus $(i, j) \in \mathcal{E}$ folgt $(j, i) \in \mathcal{E}$, und es gilt $(i, i) \notin \mathcal{E}$ für alle $i \in \mathcal{V}$).

Die *Laplace-Matrix* $L = (l_{ij}) \in \mathbb{R}^{\nu \times \nu}$ des Graphen $\mathfrak{G}$ ist definiert durch

$$l_{ij} := \begin{cases} d_i, & \text{falls } i = j \text{ und genau } d_i \text{ Kanten } (i,k) \text{ vom Knoten } i \text{ ausgehen} \\ -1, & \text{falls } i \neq j \text{ und die Kante } (i,j) \in \mathcal{E} \text{ existiert} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $\Lambda : \mathbb{R}^\nu \to \mathbb{R}^\nu$, $x \mapsto Lx$ ist selbstadjungiert bzgl. des Standardskalarproduktes.

(b) Der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von L zum Eigenwert 0.

(c) Für einen Eigenwert λ von L mit Eigenvektor v gilt

$$\lambda = \frac{\langle v, Lv \rangle}{\langle v, v \rangle} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{\nu} v_i^2} \cdot \Big(\sum_{i,j:(i,j) \in \mathcal{E}} (v_i - v_j)^2 \Big).$$

(d) Die Eigenwerte von L sind nicht negativ: $0 = \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k$.

(e) Die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes $\lambda_1 = 0$ ist die Anzahl der zusammenhängenden Komponenten von $\mathfrak{G}$.

Hinweis: Verwenden Sie den Spektralsatz.

Bemerkung: Die Laplace-Matrix kann als eine diskrete Variante des *Laplace-Operators*

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

aus der Analysis aufgefasst werden. Die Definition der Laplace-Matrix lässt sich auch auf gerichtete Graphen mit Kantengewichten verallgemeinern.

Aufgabe 2

Gegeben sei die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Der $\mathbb{R}^4$ sei mit dem Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ versehen.

(a) *Basiswechsel:* Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ aus Eigenvektoren von A und eine orthogonale Matrix $S \in \mathbf{O}(4)$, so dass

$$S^\top AS$$

eine Diagonalmatrix ist.

Hinweis: Beispiel 19.11 im Skript.

(b) Zeigen Sie, dass es eine Orthogonalbasis $\{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3, \tilde{b}_4\}$ gibt, für die

$$\langle \tilde{b}_i, A\tilde{b}_j \rangle = \begin{cases} 1, & i = j \in \{1, 2\} \\ -1, & i = j = 3 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt (beachten Sie, dass hier *keine* Orthonormalbasis gesucht ist).

(c) *Hauptachsentransformation:* Bestimmen Sie eine Matrix $T \in \mathbf{GL}(4, \mathbb{R})$, so dass

$$T^\top AT = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

gilt.

Bemerkung: Verdeutlichen Sie sich den Unterschied zwischen dem Basiswechsel aus Teil (a) und der Hauptachsentransformation aus Teil (c).

Einwurf der Lösungen bis zum 15.6.2009, 13:00 Uhr, in einen der Briefkästen im dritten Stock des Mathematik-Gebäudes 20.30 neben dem Seminarraum S32. Jede Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet. Die Übungsblätter stehen auch unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/la2_inf2009s/

zum Download bereit.