Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Klaus Spitzmüller
Dipl.-Inform. Wolfgang Globke

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II für die Fachrichtung Informatik

Übungsblatt 10 **Sommersemester 2009**

Aufgabe 1

Betrachte den $\mathbb{R}^n$ mit einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Es sei $G = \{A_1, \dots, A_m\}$ eine endliche Untergruppe von $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$.

Zeigen Sie:

(a) Durch die Vorschrift

$$(x, y) := \sum_{k=1}^{m} \langle A_k \cdot x, A_k \cdot y\rangle \qquad \text{für } x, y \in \mathbb{R}^n$$

ist ein weiteres Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ auf $\mathbb{R}^n$ definiert.

(b) Für $k = 1, \dots, m$ sind die Abbildungen $\Psi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto A_k \cdot x$ Isometrien für $(\cdot,\cdot)$.

Aufgabe 2

Der $\mathbb{R}^n$ sei mit dem Standardskalarprodukt versehen.

(a) Es sei $a \in \mathbb{R}^n$ mit $\|a\| = 1$. Weiter sei σ_a die Spiegelung parallel zur Achse $[a]$ (d.h. es wird an der Hyperebene $[a]^\perp$ gespiegelt).

Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\sigma_a(x) - x \in [a] \quad \text{und} \quad \sigma_a(x) + x \in [a]^\perp.$$

(b) Für $n = 3$ sei die Isometrie $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto A \cdot x$, mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Stellen Sie Φ als Verknüpfung von höchstens drei Spiegelungen dar.

Einwurf der Lösungen bis zum 29.6.2009, 13:00 Uhr, in einen der Briefkästen im dritten Stock des Mathematik-Gebäudes 20.30 neben dem Seminarraum S32. Jede Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet. Die Übungsblätter stehen auch unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/la2_inf2009s/

zum Download bereit.