Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Klaus Spitzmüller
Dipl.-Inform. Wolfgang Globke

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II für die Fachrichtung Informatik

Übungsblatt 12 **Sommersemester 2009**

Aufgabe 1

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} \\ \frac{1}{4}\sqrt{3}-\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} \\ \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Zeigen Sie, dass A eine Drehung beschreibt.

(b) Bestimmen Sie den Drehwinkel ω von A.

(c) Bestimmen Sie die Euler-Winkel α, β, γ von A.

Aufgabe 2

Gegeben sei der $\mathbb{R}^n$ mit Skalarprodukt und eine Isometrie $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $\Psi^2 = -\mathrm{id}_V$.

Zeigen Sie:

(a) Es existiert kein Ψ-invarianter Untervektorraum $U \subset \mathbb{R}^n$ von ungerader Dimension.

(b) Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\Psi(x) \perp x$.

Bonusaufgabe

Das *Vektorprodukt* $v \times w$ zweier Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$ ist definiert durch

$$v \times w = \begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ v_3w_1 - v_1w_3 \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{pmatrix}.$$

Es bezeichne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt.

Zeigen Sie:

(a) Die Zuordnung $(v, w) \mapsto v \times w$ ist bilinear.

(b) Das Vektorprodukt ist nicht assoziativ.

(c) Für $v, w \in \mathbb{R}^3$ ist $v \times w$ der eindeutig bestimmte Vektor, der $\det(v\ w\ x) = \langle v \times w, x \rangle$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$ erfüllt.

(d) Der Vektor $v \times w$ steht senkrecht auf dem von v und w aufgespannten Untervektorraum $[v, w]$.

(e) Es ist $v \times w = 0$ genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.

(f) Es ist $\|v \times w\| = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \sin(\angle(v, w))$.

Sie erhalten bis zu 4 Bonuspunkte für diese Aufgabe.

Einwurf der Lösungen bis zum 13.7.2009, 13:00 Uhr, in einen der Briefkästen im dritten Stock des Mathematik-Gebäudes 20.30 neben dem Seminarraum S32. Jede Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet. Die Übungsblätter stehen auch unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/la2_inf2009s/

zum Download bereit.