Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Klaus Spitzmüller
Dipl.-Inform. Wolfgang Globke

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II für die Fachrichtung Informatik

Übungsblatt 13 **Sommersemester 2009**

Aufgabe 1

Im $\mathbb{R}^4$ seien zwei Ebenen gegeben:

$$E_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right] \quad \text{und} \quad E_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right].$$

Bestimmen Sie die Lotfußpunkte $x \in E_1$ und $y \in E_2$ sowie den Abstand $d(E_1, E_2)$.

Aufgabe 2

Die Fahrt auf einer Achterbahn dauert vier Minuten. Der Verlauf der Achterbahn wird durch eine stetige Kurve $c : [0,4] \to \mathbb{R}^3$ beschrieben, deren Anfangs- und Endpunkt übereinstimmen, also $c(0) = c(4)$.

Vier Personen p_0, p_1, p_2, p_3 fahren nacheinander im Abstand von einer Minute los (d.h. p_0 zum Zeitpunkt $t = 0$, p_1 zum Zeitpunkt $t = 1$ usw.). Ihre jeweiligen Positionen auf der Achterbahn zur Zeit t werden mit $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ bezeichnet.

Zeigen Sie:

(a) Die Funktion $f(t) = \det\begin{pmatrix}p_0(t) & p_1(t) & p_2(t) & p_3(t)\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ ist eine stetige Funktion von $[0,4]$ nach $\mathbb{R}$.

(b) Es gibt einen Zeitpunkt $t_0 \in [0,4]$, so dass alle vier Personen sich zu diesem Zeitpunkt t_0 auf einer gemeinsamen Ebene im $\mathbb{R}^3$ befinden.

Bonusaufgabe

Der $\mathbb{R}^4$ sei mit dem Standardskalarprodukt versehen. Gegeben ist die reelle Matrix

$$A = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1 & -1 & -1\\ 1 & \sqrt{3} & -1 & 1\\ 1 & 1 & \sqrt{3} & -1\\ 1 & -1 & 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, x \mapsto Ax$ eine Isometrie ist.

(b) Bestimmen Sie die euklidische Normalform $\tilde{A}$ von A.

(c) Bestimmen Sie eine Matrix $S \in \mathbf{O}(4)$, so dass gilt: $S^\top A S = \tilde{A}$.

Sie erhalten bis zu 4 Bonuspunkte für diese Aufgabe.

Einwurf der Lösungen bis zum 20.7.2009, 13:00 Uhr, in einen der Briefkästen im dritten Stock des Mathematik-Gebäudes 20.30 neben dem Seminarraum S32. Jede Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet. Die Übungsblätter stehen auch unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/la2_inf2009s/

zum Download bereit.