Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Wolfgang Globke
Diego De Filippi

Karlsruher Institut für Technologie

Lineare Algebra II für die Fachrichtung Informatik

Übungsblatt 5 **Sommersemester 2012**
18.05.2012

Aufgabe 1

Die nilpotente Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{8\times 8}$$

ist in Jordanscher Normalform. Bestimmen Sie folgende Daten:

(a) Die Stufe k der Nilpotenz von A.

(b) Das Minimalpolynon h_A von A.

(c) Je eine Basis von Kern A^k, Kern $A^{k-1}, \ldots,$ Kern A.

(d) Je eine Basis von $W_k, W_{k-1}, \ldots, W_1$.

(e) Die Größe des größten Jordan-Kästchens und die Dimension des Eigenraums E_0 von A.

(f) Die Zahlen $s_k, s_{k-1}, \ldots, s_1$.

Hinweis: Die Bezeichnungen entsprechen hier denen aus Abschnitt 2.5 der Vorlesung.

Aufgabe 2

Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\Phi : V \to V$ ein Endomorphismus mit

$$\text{Bild } \Phi \subset \text{Kern } \Phi.$$

und sei $r = \text{Rang } \Phi$.

(a) Zeigen Sie, dass Φ nilpotent ist.

(b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von r das charakteristische Polynom von Φ.

(c) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von r das Minimalpolynom von Φ.

(d) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von r die Jordansche Normalform von Φ.

Aufgabe 3

(a) Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}.$$

Bestimmen Sie die Jordansche Normalform $\tilde{A}$ von A, und eine Matrix S, so dass $\tilde{A} = S^{-1}AS$ gilt.

Abgabe der Lösungen bis zum Freitag, den 25.05.2012 um 12.00 Uhr in den entsprechenden **gelben Briefkasten ihres Tutoriums bei den Seminarräumen Z1 und Z2 im Zähringerhaus, Gebäude Nr. 01.85** (Eingang neben der mathematischen Bibliothek). Bitte **heften Sie ihre Abgabe ordentlich zusammen** und **vermerken Sie ihr Tutorium, ihre Namen und ihre Matrikelnummern**. Jede Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet.
Die Übungsblätter finden Sie unter http://www.math.kit.edu/iag2/lehre/la2info20122012s/