Euler-Winkel: Mehrdeutigkeit

Die Darstellung einer Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbf{SO}_3$ durch Euler-Winkel α, β, γ ist nicht eindeutig.

So gilt beispielsweise

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ 0 & \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\pi) & -\sin(\alpha+\pi) & 0 \\ \sin(\alpha+\pi) & \cos(\alpha+\pi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\beta) & -\sin(-\beta) \\ 0 & \sin(-\beta) & \cos(-\beta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\gamma+\pi) & -\sin(\gamma+\pi) & 0 \\ \sin(\gamma+\pi) & \cos(\gamma+\pi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Beweis als Übung.

Diese Mehrdeutigkeit macht sich auch beim Bestimmen der Euler-Winkel über Koeffizientenvergleich bemerkbar. Macht man den Ansatz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} * & * & \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ * & * & -\cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\gamma)\sin(\beta) & \cos(\gamma)\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix},$$

so findet man zunächst

$$\cos(\beta) = a_{33}.$$

Dadurch ist β nur bis auf sein Vorzeichen eindeutig bestimmt:

$$\beta = \pm \arccos(a_{33})$$

Die Wahl des Vorzeichens von β bestimmt auch das Vorzeichen von $\sin(\beta)$. Beide Möglichkeiten führen aber zum richtigen Ergebnis!

Die beiden anderen Winkel berechnet man nun wie folgt: Es ist

$$\sin(\gamma) = \frac{a_{31}}{\sin(\beta)}, \quad \cos(\gamma) = \frac{a_{32}}{\sin(\beta)}.$$

Dadurch ist γ (für gegebenes β) eindeutig bestimmt.

Ebenso ist

$$\sin(\alpha) = \frac{a_{13}}{\sin(\beta)}, \quad \cos(\alpha) = \frac{a_{23}}{\sin(\beta)},$$

wodurch α (für gegebenes β) eindeutig bestimmt ist.