Beispiel: JNF

Bestimme JNF von

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{5\times 5}$$

Beispiel: JNF

Bestimme JNF von

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{5\times 5}$$

- $f_A = \det(X \cdot I_5 - A) = (X - 1)^2(X - 3)^3$
  $\Rightarrow$ Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$

Beispiel: JNF

Bestimme JNF von

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{5\times 5}$$

- $f_A = \det(X \cdot I_5 - A) = (X - 1)^2(X - 3)^3$
  $\Rightarrow$ Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$
- verallgemeinerte Eigenräume V_1 und V_3

$\dim V_1 = 2$

$$A - 1 \cdot I_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Rang } 4$$

$\dim V_1 = 2$

$$A - 1 \cdot I_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Rang } 4$$

$$(A - 1 \cdot I_5)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 4 & 4 \\ -4 & 4 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Rang } 3$$

$\dim V_1 = 2$

$$A - 1 \cdot I_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Rang } 4$$

$$(A - 1 \cdot I_5)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 4 & 4 \\ -4 & 4 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Rang } 3$$

$$(A - 1 \cdot I_5)^3 = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -8 & 0 & 8 & 8 \\ -8 & 4 & 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Rang } 3$$

Jordan-Basis von V_1

$$\mathrm{Kern}(A - 1 \cdot I_5)^2 = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

Jordan-Basis von V_1

$$\mathrm{Kern}(A - 1 \cdot I_5)^2 = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

Wähle

$$b_2(1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}(A - 1 \cdot I_5)^2 \setminus \mathrm{Kern}(A - 1 \cdot I_5).$$

Jordan-Basis von V_1

$$\mathrm{Kern}(A - 1 \cdot I_5)^2 = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

Wähle

$$b_2(1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}(A - 1 \cdot I_5)^2 \setminus \mathrm{Kern}(A - 1 \cdot I_5).$$

Setze

$$b_1(1) = (A - 1 \cdot I_5) \cdot b_2(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Jordan-Basis von V_1

$$B_1 = \{b_1(1), b_2(1)\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\dim V_3 = 3$

$$A - 3 \cdot I_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{Rang } 3$$

$\dim V_3 = 3$

$$A - 3 \cdot I_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{Rang } 3$$

$$(A - 3 \cdot I_5)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ -4 & 4 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Rang } 2$$

$\dim V_3 = 3$

$$A - 3 \cdot I_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{Rang } 3$$

$$(A - 3 \cdot I_5)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ -4 & 4 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Rang } 2$$

$$(A - 3 \cdot I_5)^3 = \begin{pmatrix} -12 & 4 & -8 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 4 & -8 & 0 & -12 \\ 8 & -8 & 0 & 0 & 8 \\ 4 & 4 & 8 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{Rang } 2$$

Jordan-Basis von V_3

$$\mathrm{Kern}(A - 3 \cdot I_5)^2 = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

Jordan-Basis von V_3

$$\text{Kern}(A - 3 \cdot I_5)^2 = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

Wähle

$$b_2(3) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Kern}(A - 3 \cdot I_5)^2 \setminus \text{Kern}(A - 3 \cdot I_5).$$

Jordan-Basis von V_3

$$\operatorname{Kern}(A - 3 \cdot I_5)^2 = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

Wähle

$$b_2(3) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Kern}(A - 3 \cdot I_5)^2 \setminus \operatorname{Kern}(A - 3 \cdot I_5).$$

Setze

$$b_1(3) = (A - 3 \cdot I_5) \cdot b_2(3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jordan-Basis von V_3

- da $\dim V_3 = 3$, fehlt noch ein Basisvektor
- wähle Eigenvektor linear unabhängig zu $b_1(3)$

Jordan-Basis von V_3

- da $\dim V_3 = 3$, fehlt noch ein Basisvektor
- wähle Eigenvektor linear unabhängig zu $b_1(3)$

Wähle

$$b_3(3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}(A - 3 \cdot I_5)$$

Jordan-Basis von V_3

- da $\dim V_3 = 3$, fehlt noch ein Basisvektor
- wähle Eigenvektor linear unabhängig zu $b_1(3)$

Wähle

$$b_3(3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}(A - 3 \cdot I_5)$$

Jordan-Basis von V_3:

$$B_3 = \{b_1(3), b_2(3), b_3(3)\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Jordan-Basis von V

$$B = B_1 \cup B_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Jordan-Basis von V

$$B = B_1 \cup B_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Basiswechselmatrix:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

JNF von A

Probe:

$$J(A) = S^{-1} \cdot A \cdot S = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) = \hat{J}_{(2)}(1) \oplus \hat{J}_{(2,1)}(3)$$