Aufgabe

Bestimmen Sie für jedes $\alpha \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ die Lösungsmenge folgenden Gleichungssystems über dem Körper $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 5x & - & 3y & + & 2z & = & 8 \\ 9x & + & y & + & 6z & = & 0 \\ x & - & 2y & - & z & = & \alpha \end{array}$$

Lösung

Da das LGS über $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ zu bestimmen ist, sollten wir uns zunächst über die Elemente in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ klar werden und wie diese miteinander zu verknüpfen sind:
Wir haben $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}\}$ (wir schenken uns ab jetzt den Querstrich und schreiben einfach 0,...,6 und meinen damit die Restklassen modulo 7, d.h. die Elemente in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$). Wir haben folgende Verknüfungstafeln bzgl. "+" und " · ":

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

·	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

In $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ gilt z.B. $9 = 2$, $8 = 1$, $-3 = 4$ (denn 4 ist das additiv Inverse zu 3, da $3 + 4 = 0$ in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, siehe Verknüpfungstafel), $-1 = 6$ usw. Das LGS können wir also auch folgendermaßen schreiben

$$\begin{array}{rcrcrcl} 5x & + & 4y & + & 2z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & 6z & = & 0 \\ x & + & 5y & + & 6z & = & \alpha \end{array}$$

Der Gauß-Algorithmus über $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ geht dann so:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & \alpha \end{array}\right)$$

Wir wollen, dass in der ersten Spalte unterhalb der 5 nur Nullen stehen. Um dort, wo die 2 steht, eine 0 zu bekommen müssen wir 5 addieren, da $5 + 2 = 0$. Also ersetzen wir Zeile 2 durch (Zeile 1 + Zeile 2).
Um dort, wo die 1 steht, eine 0 zu bekommen müssen wir 6 addieren, da $6 + 1 = 0$. Da $5 \cdot 4 = 6$, ersetzen wir Zeile 3 durch (4·Zeile 1 + Zeile 3). Wir erhalten

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha + 4 \end{array}\right)$$

Die letzte Zeile bedeutet nun $0 = 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = \alpha + 4$. Das heißt, dass das LGS nur lösbar ist für $\alpha + 4 = 0$, also für $\alpha = 3$. Wenn $\alpha \neq 3$ (immer noch in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$!), dann ist die Lösungsmenge des LGS leer.
Wenn $\alpha = 3$, ist die letzte Zeile eine Nullzeile, wir können also $z = t \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ frei wählen und das LGS hat mehrere Lösungen (aber nicht unendlich viele, da die Lösungen Elemente aus $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^3$ sind und dieser Vektorraum nur endlich viele Elemente hat).
Aus Zeile 2 folgt dann

$$\begin{array}{rrcll} & 5y + t & = & 1 & \mid +6t \\ \Leftrightarrow & 5y & = & 1 + 6t & \mid \cdot 3 \quad \text{(da 3 das multiplikativ Inverse von 5 ist)} \\ \Leftrightarrow & y & = & 3 + 4t & \end{array}$$

und aus Zeile 1 folgt

$$\begin{array}{rrcll} & 5x + 4(3 + 4t) + 2t & = & 1 & \\ & 5x + 5 + 2t + 2t & = & 1 & \mid +2 + 3t \\ \Leftrightarrow & 5x & = & 3 + 3t & \mid \cdot 3 \\ \Leftrightarrow & x & = & 3(3 + 3t) = 2 + 2t & \end{array}$$

Damit haben wir für $\alpha = 3$ folgende Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \right\}.$$