Affine Koordinaten, affine Transformationen und Roboter

Wolfgang Globke

Institut für Algebra und Geometrie
Karlsruher Institut für Technologie

Werbung

Proseminar: Kryptographie (WiSe 2012/2013)

- Dozenten:
  Prof. Dr. Claus-Günther Schmidt,
  Dr. Fabian Januszewski
- Semesterwochenstunden: 2
- Es sind noch Plätze frei
- Vermutlich nicht als Prüfungsleistung für Informatik anrechenbar
  (non vitae sed scholae!)

Geometrie und Vektoren

- Vektoren beschreiben Geometrie im Raum

Geometrie und Vektoren

- Vektoren beschreiben Geometrie im Raum
- Vektorräume sind algebraische Gebilde, die ohne expliziten Bezug zur physischen Welt definiert sind

Geometrie und Vektoren

- Vektoren beschreiben Geometrie im Raum
- Vektorräume sind algebraische Gebilde, die ohne expliziten Bezug zur physischen Welt definiert sind
- Vektorräume stellen Modelle für euklidische Geometrie dar

Wo liegt der Ursprung?

- Ein Punkt im Raum wird identifiziert mit einem Spaltenvektor aus $\mathbb{R}^n$

Wo liegt der Ursprung?

- Ein Punkt im Raum wird identifiziert mit einem Spaltenvektor aus $\mathbb{R}^n$
- Einträge im Spaltenvektor beschreiben die Lage des Punktes relativ zu einem Ursprungspunkt

Wo liegt der Ursprung?

- Ein Punkt im Raum wird identifiziert mit einem Spaltenvektor aus $\mathbb{R}^n$
- Einträge im Spaltenvektor beschreiben die Lage des Punktes relativ zu einem Ursprungspunkt
- Der Ursprungspunkt wird durch den 0-Vektor beschrieben

Wo liegt der Ursprung?

- Ein Punkt im Raum wird identifiziert mit einem Spaltenvektor aus $\mathbb{R}^n$
- Einträge im Spaltenvektor beschreiben die Lage des Punktes relativ zu einem Ursprungspunkt
- Der Ursprungspunkt wird durch den 0-Vektor beschrieben
- Aber welchen Punkt im physischen Raum wählt man als Ursprung?

Wo liegt der Ursprung?

- Ein Punkt im Raum wird identifiziert mit einem Spaltenvektor aus $\mathbb{R}^n$
- Einträge im Spaltenvektor beschreiben die Lage des Punktes relativ zu einem Ursprungspunkt
- Der Ursprungspunkt wird durch den 0-Vektor beschrieben
- Aber welchen Punkt im physischen Raum wählt man als Ursprung?
- $\Rightarrow$ Vorsicht:
  Der Raum $\mathbb{R}^n$ ist *nicht identisch* mit dem physischen Raum!
  (Identifizierung ist erst zulässig, wenn ein Ursprung gewählt wurde.)

Der affine Raum $\mathbb{A}^n$

- Fasse $\mathbb{R}^n$ als Menge von Punkten auf, vergesse die algebraische Struktur: $\mathbb{A}^n$

Der affine Raum $\mathbb{A}^n$

- Fasse $\mathbb{R}^n$ als Menge von Punkten auf,
  vergesse die algebraische Struktur: $\mathbb{A}^n$
- Zu dem affinen Punktraum $\mathbb{A}^n$ gehört der *Vektor*raum $\mathbb{R}^n$ der Richtungen

Der affine Raum $\mathbb{A}^n$

- Fasse $\mathbb{R}^n$ als Menge von Punkten auf, vergesse die algebraische Struktur: $\mathbb{A}^n$
- Zu dem affinen Punktraum $\mathbb{A}^n$ gehört der *Vektor*raum $\mathbb{R}^n$ der Richtungen
- Zu je zwei Punkten $p, q \in \mathbb{A}^n$ gibt es einen Verbindungsvektor $v \in \mathbb{R}^n$ mit
$$q = p + v$$
(„Pfeil, der von p nach q zeigt")

Der affine Raum $\mathbb{A}^n$

- Fasse $\mathbb{R}^n$ als Menge von Punkten auf, vergesse die algebraische Struktur: $\mathbb{A}^n$
- Zu dem affinen Punktraum $\mathbb{A}^n$ gehört der *Vektor*raum $\mathbb{R}^n$ der Richtungen
- Zu je zwei Punkten $p, q \in \mathbb{A}^n$ gibt es einen Verbindungsvektor $v \in \mathbb{R}^n$ mit
$$q = p + v$$
(„Pfeil, der von p nach q zeigt")
- Sowohl Punkte als auch Richtungsvektoren können durch Spaltenvektoren des $\mathbb{R}^n$ dargestellt werden.

Affine Unterräume des $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{A}^n$

Ein affiner Unterraum H von $\mathbb{R}^n$ besteht aus

- einem UVR $U \subset \mathbb{R}^n$
- einem Stützvektor $x \in \mathbb{R}^n$,

so dass

$$H = x + U$$

Kurz

Affine Geometrie $=$ Lineare Algebra $\cup$ Verschiebungen

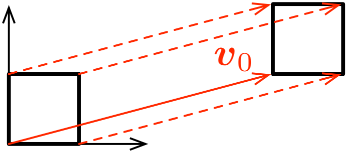
Wer lineare Algebra kann, lernt affine Geometrie in zwei Tagen.

Verschiebungen

Im Gegensatz zu den bisher betrachteten Transformationen sind Verschiebungen *nicht linear*.
Eine Verschiebung um einen festen Vektor $\mathbf{v}_0$ ist durch die Vorschrift

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{v}_0$$

gegeben.



Trick: Erweiterte Koordinaten

Es ist dennoch möglich, Verschiebungen durch Matrizen darzustellen.
Dazu bettet man den $\mathbb{R}^3$ in den $\mathbb{R}^4$ ein:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Darstellung bezeichnet man als erweiterte Koordinaten.

Trick: Erweiterte Koordinaten

Jetzt wird die Verschiebung um den konstanten Vektor

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

dargestellt durch die Matrixmultiplikation

$$\begin{pmatrix} x + v_x \\ y + v_y \\ z + v_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & v_x \\ 0 & 1 & 0 & v_y \\ 0 & 0 & 1 & v_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Trick: Erweiterte Koordinaten

Ein Element $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ kann sowohl als Punkt im Raum als auch als Richtungsvektor („Pfeil“) interpretiert werden.

Trick: Erweiterte Koordinaten

Ein Element $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ kann sowohl als Punkt im Raum als auch als Richtungsvektor („Pfeil“) interpretiert werden.
In erweiterten Koordinaten lassen sich diese beiden Konzepte unterscheiden:

Trick: Erweiterte Koordinaten

Ein Element $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ kann sowohl als Punkt im Raum als auch als Richtungsvektor („Pfeil“) interpretiert werden.
In erweiterten Koordinaten lassen sich diese beiden Konzepte unterscheiden:

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

bezeichnet einen Punkt im Raum,

Trick: Erweiterte Koordinaten

Ein Element $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ kann sowohl als Punkt im Raum als auch als Richtungsvektor („Pfeil“) interpretiert werden.
In erweiterten Koordinaten lassen sich diese beiden Konzepte unterscheiden:

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

bezeichnet einen Punkt im Raum, aber

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 0 \end{pmatrix}$$

bezeichnet einen Richtungsvektor.

Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine Matrix, die eine lineare geometrische Transformation beschreibt und sei $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

Affine Transformationen

Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine Matrix, die eine lineare geometrische Transformation beschreibt und sei $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.
Eine affine Transformation

$$\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} + \mathbf{v}$$

ist die Verknüpfung einer linearen Transformation mit einer Verschiebung.

Affine Transformationen

Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine Matrix, die eine lineare geometrische Transformation beschreibt und sei $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.
Eine affine Transformation

$$\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} + \mathbf{v}$$

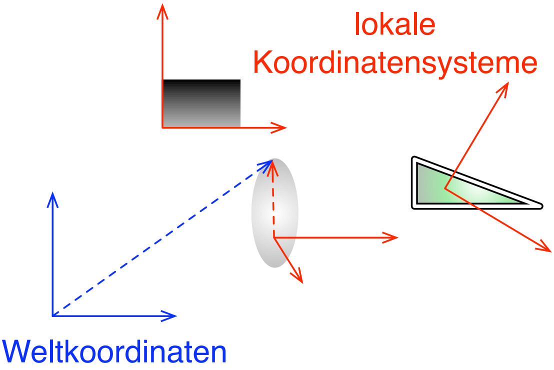
ist die Verknüpfung einer linearen Transformation mit einer Verschiebung.
Jede affine Transformation lässt sich in erweiterten Koordinaten durch eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} & & & v_x \\ & A & & v_y \\ & & & v_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

darstellen.

In der Anwendung:
Man legt einen festen Ursprung und drei feste Achsen als Weltkoordinatensystem fest und ordnet zusätzlich jedem geometrischen Objekt ein lokales Koordinatensystem zu.

Weltkoordinaten und lokale Koordinaten

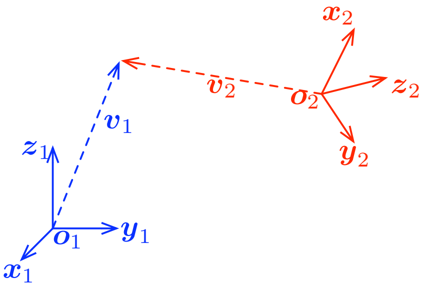


Ein Koordinatensystem $\mathrm{KS}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}; \mathbf{o})$ im $\mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

- den Ursprung $\mathbf{o}$
- und drei Basisvektoren $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, die die Koordinatenachsen aufspannen.

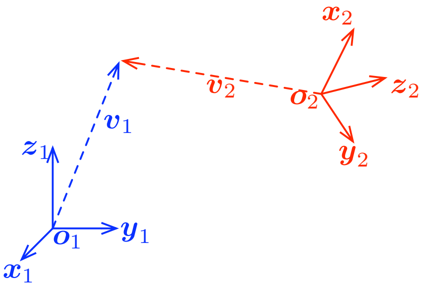
Koordinatenwechsel

Sind zwei Koordinatensysteme $\mathrm{KS}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1; \mathbf{o}_1)$ und $\mathrm{KS}_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}_2; \mathbf{o}_2)$ gegeben, so hat jeder Punkt im Raum eine Koordinatendarstellung $\mathbf{v}_1$ bzgl. KS_1 und eine Darstellung $\mathbf{v}_2$ bzgl. KS_2.



Koordinatenwechsel

Sind zwei Koordinatensysteme $\mathrm{KS}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1; \mathbf{o}_1)$ und $\mathrm{KS}_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}_2; \mathbf{o}_2)$ gegeben, so hat jeder Punkt im Raum eine Koordinatendarstellung $\mathbf{v}_1$ bzgl. KS_1 und eine Darstellung $\mathbf{v}_2$ bzgl. KS_2.



Wie kann man die Darstellung bzgl. KS_1 umrechnen in die Darstellung bzgl. KS_2 (und umgekehrt)?

- Die Darstellung bzgl. KS_1 erhält man, indem man so tut, als sei $\mathbf{o}_1$ der 0-Vektor und dann $\mathbf{v}_1$ als Linearkombination der Basis $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{z}_1$ bestimmt.

Koordinatenwechsel

- Die Darstellung bzgl. KS_1 erhält man, indem man so tut, als sei $\mathbf{o}_1$ der 0-Vektor und dann $\mathbf{v}_1$ als Linearkombination der Basis $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{z}_1$ bestimmt.
- Wenn KS_1 und KS_2 im gleichen Ursprungspunkt liegen (also $\mathbf{o}_1 = \mathbf{o}_2$), so erhält man den Wechsel vom Koordinatensystem KS_1 zu KS_2 durch einfachen Basiswechsel von der Basis $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{z}_1$ zur Basis $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{y}_2$, $\mathbf{z}_2$.

Koordinatenwechsel

- Die Darstellung bzgl. KS_1 erhält man, indem man so tut, als sei $\mathbf{o}_1$ der 0-Vektor und dann $\mathbf{v}_1$ als Linearkombination der Basis $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{z}_1$ bestimmt.
- Wenn KS_1 und KS_2 im gleichen Ursprungspunkt liegen (also $\mathbf{o}_1 = \mathbf{o}_2$), so erhält man den Wechsel vom Koordinatensystem KS_1 zu KS_2 durch einfachen Basiswechsel von der Basis $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{z}_1$ zur Basis $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{y}_2$, $\mathbf{z}_2$.
  Genauer:
  $$\mathbf{v}_2 = A_{21}\mathbf{v}_1,$$
  wobei A_{21} die Übergangsmatrix dieses Basiswechsels ist.

Koordinatenwechsel

- Die Darstellung bzgl. KS_1 erhält man, indem man so tut, als sei $\mathbf{o}_1$ der 0-Vektor und dann $\mathbf{v}_1$ als Linearkombination der Basis $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{z}_1$ bestimmt.
- Wenn KS_1 und KS_2 im gleichen Ursprungspunkt liegen (also $\mathbf{o}_1 = \mathbf{o}_2$), so erhält man den Wechsel vom Koordinatensystem KS_1 zu KS_2 durch einfachen Basiswechsel von der Basis $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{z}_1$ zur Basis $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{y}_2$, $\mathbf{z}_2$.
  Genauer:
  $$\mathbf{v}_2 = A_{21}\mathbf{v}_1,$$
  wobei A_{21} die Übergangsmatrix dieses Basiswechsels ist.
- Ist aber $\mathbf{o}_1 \neq \mathbf{o}_2$, so muss noch die Verschiebung der beiden Ursprungspunkte berücksichtigt werden.

Koordinatenwechsel

Für $\mathbf{o}_1 \neq \mathbf{o}_2$ kann man sich das Vorgehen wie folgt überlegen:

1. Bestimme durch Basiswechsel A_{21} den Koordinatenwechsel zum Koordinatensystem $\mathrm{KS}_2'(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}_2; \mathbf{o}_1)$ mit den Achsen von KS_2, aber dem Ursprung von KS_1:

$$\mathbf{v}_2' = A_{21}\mathbf{v}_1.$$

Für $\mathbf{o}_1 \neq \mathbf{o}_2$ kann man sich das Vorgehen wie folgt überlegen:

1. Bestimme durch Basiswechsel A_{21} den Koordinatenwechsel zum Koordinatensystem $\mathrm{KS}_2'(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}_2; \mathbf{o}_1)$ mit den Achsen von KS_2, aber dem Ursprung von KS_1:
$$\mathbf{v}_2' = A_{21}\mathbf{v}_1.$$
2. KS_2 und KS_2' unterscheiden sich durch eine Parallelverschiebung um den Vektor $\mathbf{d}_{12}$ mit $\mathbf{o}_2 = \mathbf{o}_1 + \mathbf{d}_{12}$.

Koordinatenwechsel

Für $\mathbf{o}_1 \neq \mathbf{o}_2$ kann man sich das Vorgehen wie folgt überlegen:

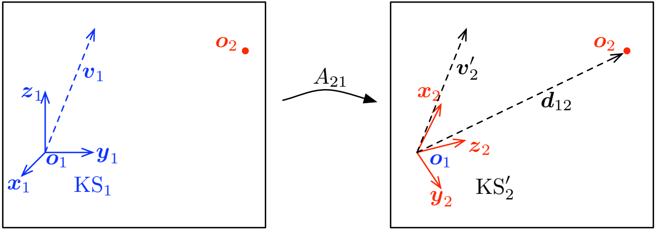
1. Bestimme durch Basiswechsel A_{21} den Koordinatenwechsel zum Koordinatensystem $\mathrm{KS}_2'(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}_2; \mathbf{o}_1)$ mit den Achsen von KS_2, aber dem Ursprung von KS_1:
$$\mathbf{v}_2' = A_{21}\mathbf{v}_1.$$
2. KS_2 und KS_2' unterscheiden sich durch eine Parallelverschiebung um den Vektor $\mathbf{d}_{12}$ mit $\mathbf{o}_2 = \mathbf{o}_1 + \mathbf{d}_{12}$.
3. Also erhält man den Koordinatenwechsel von KS_2' zu KS_2, indem man den Vektor $\mathbf{d}_{12}$ in das Koordinatensystem KS_2' umrechnet, $\mathbf{d}_{12}' = A_{21}\mathbf{d}_{12}$, und von $\mathbf{v}_2'$ abzieht:
$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2' - \mathbf{d}_{12}'.$$

Koordinatenwechsel

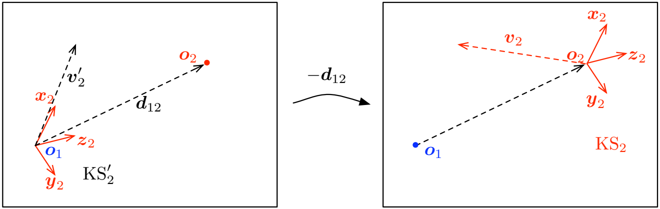
Für $\mathbf{o}_1 \neq \mathbf{o}_2$ kann man sich das Vorgehen wie folgt überlegen:

1. Bestimme durch Basiswechsel A_{21} den Koordinatenwechsel zum Koordinatensystem $\mathrm{KS}_2'(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}_2; \mathbf{o}_1)$ mit den Achsen von KS_2, aber dem Ursprung von KS_1:
$$\mathbf{v}_2' = A_{21}\mathbf{v}_1.$$
2. KS_2 und KS_2' unterscheiden sich durch eine Parallelverschiebung um den Vektor $\mathbf{d}_{12}$ mit $\mathbf{o}_2 = \mathbf{o}_1 + \mathbf{d}_{12}$.
3. Also erhält man den Koordinatenwechsel von KS_2' zu KS_2, indem man den Vektor $\mathbf{d}_{12}$ in das Koordinatensystem KS_2' umrechnet, $\mathbf{d}_{12}' = A_{21}\mathbf{d}_{12}$, und von $\mathbf{v}_2'$ abzieht:
$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2' - \mathbf{d}_{12}'.$$
4. Den Koordinatenwechsel von KS_1 zu KS_2 erhält man durch Zusammensetzen der Koordinatenwechsel von KS_1 zu KS_2' und dem Wechsel von KS_2' zu KS_2:

Koordinatenwechsel



1

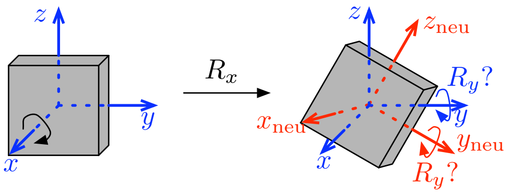


2

Verkettete Transformationen: Beispiel

Ein Würfel, dessen Mittelpunkt im Ursprung liegt, soll zuerst um die x-Achse gedreht werden, dann um die y-Achse.

- Die jeweiligen Rotationsmatrizen seien R_x und R_y.
- Dies lässt zwei Interpretationen zu:



- Nach der ersten Transformation R_x stellt sich die Frage, bzgl. welcher y-Achse die zweite Transformation durchgeführt wird: Bzgl. der y-Achse des Weltkoordinatensystems oder der y_{neu}-Achse des lokalen Koordinatensystems des Würfels?

Verkettete Transformationen: Beispiel

1. Falls die zweite Rotation auf die y-Achse des Weltkoordinatensystems bezogen ist:

Verkettete Transformationen: Beispiel

1. Falls die zweite Rotation auf die y-Achse des Weltkoordinatensystems bezogen ist:
    - Die Rotation wird durch die Matrix R_y dargestellt.

Verkettete Transformationen: Beispiel

1. Falls die zweite Rotation auf die y-Achse des Weltkoordinatensystems bezogen ist:
   - Die Rotation wird durch die Matrix R_y dargestellt.
   - Da Matrizen *von links nach rechts* auf Vektoren durch Multiplikation operieren, beschreibt

     $$R_y R_x$$

     die verkettete Transformation, bei der zuerst um die x-Achse, dann um die y-Achse des Weltkoordinatensystems gedreht wird.

Verkettete Transformationen: Beispiel

2. Falls die zweite Rotation auf die y_{neu}-Achse des am Würfel „befestigten“ lokalen Koordinatensystems bezogen ist:

2. Falls die zweite Rotation auf die y_{neu}-Achse des am Würfel „befestigten“ lokalen Koordinatensystems bezogen ist:
   - Im lokalen Koordinatensystem wird die Drehung um die y_{neu}-Achse durch die Matrix R_y ausgedrückt.

Verkettete Transformationen: Beispiel

2. Falls die zweite Rotation auf die y_{neu}-Achse des am Würfel „befestigten" lokalen Koordinatensystems bezogen ist:
   - Im lokalen Koordinatensystem wird die Drehung um die y_{neu}-Achse durch die Matrix R_y ausgedrückt.
   - *Problem:* Wie drückt man die Rotation um die y_{neu}-Achse in Weltkoordinaten aus?

Verkettete Transformationen: Beispiel

2. Falls die zweite Rotation auf die y_{neu}-Achse des am Würfel „befestigten" lokalen Koordinatensystems bezogen ist:
    - Im lokalen Koordinatensystem wird die Drehung um die y_{neu}-Achse durch die Matrix R_y ausgedrückt.
    - *Problem:* Wie drückt man die Rotation um die y_{neu}-Achse in Weltkoordinaten aus?
    - *Idee:* Transformiere durch R_x^{-1} das lokale Koordinatensystem zurück aufs Weltkoordinatensystem,

Verkettete Transformationen: Beispiel

2. Falls die zweite Rotation auf die y_{neu}-Achse des am Würfel „befestigten" lokalen Koordinatensystems bezogen ist:
    - Im lokalen Koordinatensystem wird die Drehung um die y_{neu}-Achse durch die Matrix R_y ausgedrückt.
    - *Problem:* Wie drückt man die Rotation um die y_{neu}-Achse in Weltkoordinaten aus?
    - *Idee:* Transformiere durch R_x^{-1} das lokale Koordinatensystem zurück aufs Weltkoordinatensystem, drehe dort mit R_y um die y-Achse,

Verkettete Transformationen: Beispiel

2. Falls die zweite Rotation auf die y_{neu}-Achse des am Würfel „befestigten“ lokalen Koordinatensystems bezogen ist:
   - Im lokalen Koordinatensystem wird die Drehung um die y_{neu}-Achse durch die Matrix R_y ausgedrückt.
   - *Problem:* Wie drückt man die Rotation um die y_{neu}-Achse in Weltkoordinaten aus?
   - *Idee:* Transformiere durch R_x^{-1} das lokale Koordinatensystem zurück aufs Weltkoordinatensystem, drehe dort mit R_y um die y-Achse, und transformiere durch R_x zurück aufs lokale Koordinatensystem.

Verkettete Transformationen: Beispiel

2. Falls die zweite Rotation auf die y_{neu}-Achse des am Würfel „befestigten" lokalen Koordinatensystems bezogen ist:
   - Im lokalen Koordinatensystem wird die Drehung um die y_{neu}-Achse durch die Matrix R_y ausgedrückt.
   - *Problem:* Wie drückt man die Rotation um die y_{neu}-Achse in Weltkoordinaten aus?
   - *Idee:* Transformiere durch R_x^{-1} das lokale Koordinatensystem zurück aufs Weltkoordinatensystem, drehe dort mit R_y um die y-Achse, und transformiere durch R_x zurück aufs lokale Koordinatensystem.
   - Also:

     $$R_x R_y R_x^{-1}$$

     beschreibt die Drehung um die y_{neu}-Achse des lokalen Koordinatensystems (aber ausgedrückt im Weltkoordinatensystem).

Verkettete Transformationen: Beispiel

2. Falls die zweite Rotation auf die y_{neu}-Achse des am Würfel „befestigten“ lokalen Koordinatensystems bezogen ist:
   - Im lokalen Koordinatensystem wird die Drehung um die y_{neu}-Achse durch die Matrix R_y ausgedrückt.
   - *Problem:* Wie drückt man die Rotation um die y_{neu}-Achse in Weltkoordinaten aus?
   - *Idee:* Transformiere durch R_x^{-1} das lokale Koordinatensystem zurück aufs Weltkoordinatensystem, drehe dort mit R_y um die y-Achse, und transformiere durch R_x zurück aufs lokale Koordinatensystem.
   - Also:
     $$R_x R_y R_x^{-1}$$
     beschreibt die Drehung um die y_{neu}-Achse des lokalen Koordinatensystems (aber ausgedrückt im Weltkoordinatensystem).
   - Verkettung der beiden Rotationen um x- und y_{neu}-Achse:
     $$R_{y_{\text{neu}}} R_x = (R_x R_y R_x^{-1}) R_x = R_x R_y,$$
     also gerade die *umgekehrte Reihenfolge* wie im Fall 1.

Verkettete Transformationen

Allgemein:
Seien $A_1, \ldots, A_k$ Transformationsmatrizen, die in der Reihenfolge 1 bis k angewendet werden sollen.

Verkettete Transformationen

Allgemein:
Seien $A_1, \ldots, A_k$ Transformationsmatrizen, die in der Reihenfolge 1 bis k angewendet werden sollen.

- Dann beschreibt

$$A_k \cdots A_2 A_1$$

  die verkettete Transformation im Weltkoordinatensystem,

Verkettete Transformationen

Allgemein:
Seien $A_1, \ldots, A_k$ Transformationsmatrizen, die in der Reihenfolge 1 bis k angewendet werden sollen.

- Dann beschreibt

$$A_k \cdots A_2 A_1$$

  die verkettete Transformation im Weltkoordinatensystem,

- und

$$A_1 \cdots A_{k-1} A_k$$

  die verkettete Transformation bzgl. der Achsen des lokalen Koordinatensystems, das am Würfel befestigt ist.

Verkettete Transformationen

Allgemein:
Seien $A_1, \ldots, A_k$ Transformationsmatrizen, die in der Reihenfolge 1 bis k angewendet werden sollen.

- Dann beschreibt
$$A_k \cdots A_2 A_1$$
die verkettete Transformation im Weltkoordinatensystem,
- und
$$A_1 \cdots A_{k-1} A_k$$
die verkettete Transformation bzgl. der Achsen des lokalen Koordinatensystems, das am Würfel befestigt ist.
- Falls Verschiebungen auftreten, verwende erweiterte Koordinaten.

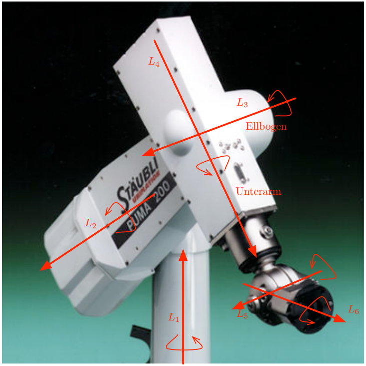
OpenGL (Open Graphics Library) ist ein Industriestandard für 3D-Computergraphik.

- OpenGL-Routinen sind in jeder Graphikkarte implementiert.
- Objekte werden aus *geometrischen Primitiven* aufgebaut (Punkte, Linien, Polygone).
- OpenGL ist ein Zustandsautomat.
  Dementsprechend muss ein OpenGL-Programm als Folge von Zustandsänderungen eines Automaten entworfen werden.

- Geometrische Transformationen werden in OpenGL durch Matrizen in erweiterten Koordinaten dargestellt.
- Matrizen werden aneinandermultipliziert, in umgekehrter Reihenfolge der Ausführung: Operationen beziehen sich auf Achsen des transformierten Objekts.
- Verständnis von lokalen und globalen Koordinatensystemen ist unerlässlich!

Roboter

Die einzelnen Bauteile eines Roboters sind verbunden durch Schubgelenke oder Drehgelenke.



Im Bild der Puma 200 Roboterarm mit sechs Drehgelenken. Am Ende des Armes wird üblicherweise ein Werkzeug befestigt.

Roboter

- Zur Steuerung des Roboters werden über kleine Motoren die Winkel an den Gelenkachsen geändert.
- Die Lage des Armes (insbesondere des Werkzeugs am Ende) ist durch die Winkel eindeutig festgelegt.
- Umgekehrt können mehrere Winkeleinstellungen zur gleichen Positionierung des Werkzeugs führen („Mehrdeutigkeiten“).

Klassische Probleme der Robotersteuerung

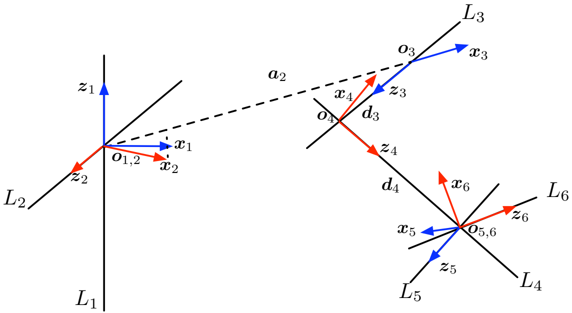
1. Das Problem der direkten Kinematik besteht darin, bei gegebenen Gelenkwinkeln die Position des Roboterarmes (bzw. des Werkzeugs) zu bestimmen.
2. Das Problem der inversen Kinematik besteht darin, zu einer vorgeschriebenen Position des Werkzeugs diejenigen Gelenkwinkel zu bestimmen, die den Roboterarm in diese Position bringen.

Denavit-Hartenberg-Konfiguration

Wie geht man die Lösung dieser Probleme an?

- Lege ein Weltkoordinatensystem fest und versehe jedes Gelenk mit einem lokalen Koordinatensystem.
- Die Denavit-Hartenberg-Konfiguration (DH) ist eine Konvention, die vorgibt, wie die lokalen Koordinatensysteme in jeder Achse zu wählen sind.

Nochmal der Puma 200 - etwas abstrakter dargestellt.



Die Koordinatensysteme sind durch die DH-Konfiguration festgelegt.

Werden die Koordinatensysteme gemäß der DH-Konfiguration festgelegt, so wird die Transformation vom $i+1$-ten zum i-ten Koordinatensystem in erweiterten Koordinaten durch die Denavit-Hartenberg-Matrix dargestellt:

$$A_i = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta_i) & -\sin(\vartheta_i)\cos(\alpha_i) & \sin(\vartheta_i)\sin(\alpha_i) & a_i\cos(\vartheta_i) \\ \sin(\vartheta_i) & \cos(\vartheta_i)\cos(\alpha_i) & -\cos(\vartheta_i)\sin(\alpha_i) & a_i\sin(\vartheta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hierbei ist ϑ_i der Gelenkwinkel im i-ten Gelenk.

Denavit-Hartenberg-Matrix

Für sechs Gelenke ergibt sich die Transformation vom Weltkoordinatensystem zum lokalen Koordinatensystem des Werkzeugs durch

$$A = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6.$$

In dieser Reihenfolge beziehen sich die einzelnen Transformationen immer auf die Achsen der lokalen Koordinatensysteme in den Gelenken.

Gegeben: Gelenkwinkel $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_6$.
Gesucht: Position und Orientierung des Werkzeugs.

Direkte Kinematik

Gegeben: Gelenkwinkel $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_6$.
Gesucht: Position und Orientierung des Werkzeugs.
Lösung:

- Mit den bekannten Winkeln kann man die DH-Matrizen aufstellen.
- Damit wird einfach die erweiterte Transformationsmatrix A ausgerechnet:

$$A = \begin{pmatrix} & & & v_1 \\ & R & & v_2 \\ & & & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Die Position ist $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, und die Orientierung kann man anhand der Euler-Winkel aus der Rotation R ablesen.

Inverse Kinematik

Gegeben: Positionsvektor **v** und Orientierung (gegeben durch eine Rotation R).
Gesucht: Gelenkwinkel $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_6$, so dass das Werkzeug des Roboterarmes die gegeben Position und Orientierung annimmt.

Inverse Kinematik

Gegeben: Positionsvektor **v** und Orientierung (gegeben durch eine Rotation R).
Gesucht: Gelenkwinkel $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_6$, so dass das Werkzeug des Roboterarmes die gegeben Position und Orientierung annimmt.
Lösungsansätze:

- Schrittweises Auflösen nach $\vartheta_6, \ldots, \vartheta_1$ anhand der Gleichungen, die durch die Matrizenmultiplikation gegeben sind.

Gegeben: Positionsvektor $\mathbf{v}$ und Orientierung (gegeben durch eine Rotation R).
Gesucht: Gelenkwinkel $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_6$, so dass das Werkzeug des Roboterarmes die gegeben Position und Orientierung annimmt.
Lösungsansätze:

- Schrittweises Auflösen nach $\vartheta_6, \ldots, \vartheta_1$ anhand der Gleichungen, die durch die Matrizenmultiplikation gegeben sind.
- Ersetze Ausdrücke $\sin(\vartheta_i)$ und $\cos(\vartheta_i)$ durch Variablen s_i, c_i. Dies führt auf polynomiale Gleichungensysteme, die mit Verfahren der Computeralgebra lösbar sind (Gröbner-Basen).

Gegeben: Positionsvektor $\mathbf{v}$ und Orientierung (gegeben durch eine Rotation R).
Gesucht: Gelenkwinkel $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_6$, so dass das Werkzeug des Roboterarmes die gegeben Position und Orientierung annimmt.
Lösungsansätze:

- Schrittweises Auflösen nach $\vartheta_6, \ldots, \vartheta_1$ anhand der Gleichungen, die durch die Matrizenmultiplikation gegeben sind.
- Ersetze Ausdrücke $\sin(\vartheta_i)$ und $\cos(\vartheta_i)$ durch Variablen s_i, c_i. Dies führt auf polynomiale Gleichungensysteme, die mit Verfahren der Computeralgebra lösbar sind (Gröbner-Basen).
- Linearisiere das Problem durch Rückführen der Transformationen auf die Lie-Algebra $\mathfrak{se}_3(\mathbb{R})$.

Gegeben: Positionsvektor $\mathbf{v}$ und Orientierung (gegeben durch eine Rotation R).
Gesucht: Gelenkwinkel $\vartheta_1, \dots, \vartheta_6$, so dass das Werkzeug des Roboterarmes die gegeben Position und Orientierung annimmt.
Lösungsansätze:

- Schrittweises Auflösen nach $\vartheta_6, \dots, \vartheta_1$ anhand der Gleichungen, die durch die Matrizenmultiplikation gegeben sind.
- Ersetze Ausdrücke $\sin(\vartheta_i)$ und $\cos(\vartheta_i)$ durch Variablen s_i, c_i. Dies führt auf polynomiale Gleichungensysteme, die mit Verfahren der Computeralgebra lösbar sind (Gröbner-Basen).
- Linearisiere das Problem durch Rückführen der Transformationen auf die Lie-Algebra $\mathfrak{se}_3(\mathbb{R})$.
- Geometrisch intuitive Lösung mit Clifford-Algebren.

Inverse Kinematik

Gegeben: Positionsvektor $\mathbf{v}$ und Orientierung (gegeben durch eine Rotation R).
Gesucht: Gelenkwinkel $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_6$, so dass das Werkzeug des Roboterarmes die gegeben Position und Orientierung annimmt.
Lösungsansätze:

- Schrittweises Auflösen nach $\vartheta_6, \ldots, \vartheta_1$ anhand der Gleichungen, die durch die Matrizenmultiplikation gegeben sind.
- Ersetze Ausdrücke $\sin(\vartheta_i)$ und $\cos(\vartheta_i)$ durch Variablen s_i, c_i. Dies führt auf polynomiale Gleichungensysteme, die mit Verfahren der Computeralgebra lösbar sind (Gröbner-Basen).
- Linearisiere das Problem durch Rückführen der Transformationen auf die Lie-Algebra $\mathfrak{se}_3(\mathbb{R})$.
- Geometrisch intuitive Lösung mit Clifford-Algebren.
- Heuristiken.

- W. Boehm, H. Prautzsch
  Geometric Concepts for Geometric Design (A K Peters)
- W. Globke
  Kinematik des Puma 200
- J. Kuipers
  Quaternions and Rotation Sequences (PUP)
- J.S. Selig
  Geometric Fundamentals of Robotics (Springer)