Aufgabe I.1

Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ die Gruppe aller invertierbaren Matrizen in $\mathbb{Q}^{n\times n}$. Gegeben sei die Teilmenge

$$G = \left\{ \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{A}} & a \\ & & b \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \mid A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}),\ a, b \in \mathbb{Q} \right\}$$

von $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q})$ sowie die Abbildung

$$\Phi : G \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\,, \quad \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{A}} & a \\ & & b \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \ \mapsto\ A.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Menge G ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q})$.

(b) Die Abbildung $\Phi : G \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

(c) Der Kern von Φ ist isomorph zu $\mathbb{Q}^2$ mit der komponentenweisen Addition.

Lösungsvorschlag

(a) Wegen $I_3 \in G$ ist G nicht leer. Weiter gilt für

$$g = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{A}} & a \\ & & b \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad h = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{C}} & c \\ & & d \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \qquad g \cdot h = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{$A \cdot C$}} & e \\ & & f \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

wobei

$$\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^2.$$

Da $A \cdot C \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$, gilt also $g \cdot h \in G$.

Wir müssen noch zeigen, dass für jedes $g \in G$ auch g^{-1} in G liegt. Dazu machen wir den Ansatz $g \cdot h = I_3$ mit g, h wie oben, was äquivalent ist zu

$$A \cdot C = I_2 \quad \text{und} \quad A \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies bedeutet

$$C = A^{-1} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = -A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^2.$$

Somit liegt auch $g^{-1} = h$ in G.

(b) Wir müssen zeigen, dass für alle $g, h \in G$ die Gleichung $\Phi(g \cdot h) = \Phi(g) \cdot \Phi(h)$ gilt. Für $g, h \in G$ wie oben erhalten wir

$$\Phi(g \cdot h) = A \cdot C = \Phi(g) \cdot \Phi(h).$$

(c) Es gilt

$$\ker(\Phi) = \{g \in G \mid \Phi(g) = I_2\} = \left\{ \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{I_2}} & a \\ & & b \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Die Abbildung

$$i : \ker(\Phi) \to \mathbb{Q}^2, \quad \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{I_2}} & a \\ & & b \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

ist ein Gruppenhomomorphismus, denn für

$$g = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{I_2}} & a \\ & & b \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad h = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{I_2}} & c \\ & & d \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \in \ker(\Phi)$$

gilt

$$i(g \cdot h) = i\Big(\left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{I_2}} & a+c \\ & & b+d \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Big) = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix} = i(g) + i(h).$$

Weiter ist i injektiv, denn

$$\ker(i) = \{g \in \ker(\Phi) \mid i(g) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} = \left\{ \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{I_2}} & 0 \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \right\}.$$

i ist auch surjektiv, denn für $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^2$ beliebig erfüllt

$$g = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{I_2}} & x \\ & & y \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \in \ker(\Phi)$$

die Bedingung $i(g) = v$. Insgesamt ist i also ein bijektiver Gruppenhomomorphismus, das heißt $\ker(\Phi)$ ist isomorph zu $\mathbb{Q}^2$ mit der komponentenweisen Addition.

Aufgabe I.2

Es sei $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ und
$$L_A : \mathbb{C}^{2\times 2} \to \mathbb{C}^{2\times 2}, \quad X \mapsto A \cdot X,$$
die Abbildung, die durch Linksmultiplikation mit A gegeben ist.

(a) Zeigen Sie, dass L_A (für festes A) ein Endomorphismus des Vektorraumes $\mathbb{C}^{2\times 2}$ der komplexen 2×2-Matrizen ist.

(b) Es sei nun
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von L_A bezüglich der geordneten Basis
$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(c) Bestimmen Sie für die Matrix A wie in Teil (b) eine Basis von $\mathrm{Kern}(L_A)$ und eine Basis von $\mathrm{Bild}(L_A)$.

Lösungsvorschlag

(a) Für beliebige Matrizen $X, Y \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ gilt wegen des Distributivgesetzes im Matrizenring
$$L_A(X+Y) = A(X+Y) = AX + AY = L_A(X) + L_A(Y).$$
Wenn weiter $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Skalar ist, so gilt $A\lambda = \lambda A$ und damit für beliebiges X wie oben
$$L_A(\lambda X) = A \cdot (\lambda X) = (A\lambda)X = \lambda(AX) = \lambda L_A(X).$$
Das zeigt die Linearität von L_A.

(b) Benennen wir die vier Matrizen in der Reihenfolge des Auftretens mit b_1, b_2, b_3 und b_4, so müssen wir nun für alle j die Matrix Ab_j schreiben als $Ab_j = \sum_{i=1}^4 c_{ij} b_i$, und erhalten dabei die Abbildungsmatrix (c_{ij}).

Es gilt zum Beispiel
$$Ab_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = (-1) \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + 2 \cdot b_3 + 0 \cdot b_4$$
und analog für die anderen Basisvektoren. Die Abbildungsmatrix ist
$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

(c) Der Rang von C ist 2, also haben Kern und Bild von L_A jeweils Dimension 2.

Die Menge $\{2b_1 + b_3,\ 2b_2 + b_4\}$ ist eine zweielementige linear unabhängige Teilmenge des Kerns, also eine Basis davon.

Die Menge $\{b_1 - 2b_3,\ b_2 - 2b_4\}$ ist eine zweielementige linear unabhängige Teilmenge des Bildes, also eine Basis davon.

Aufgabe I.3

Gegeben sei das folgende Gleichungssystem mit $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcl} b \cdot x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2 \cdot x_1 & + & x_2 & + & a \cdot x_3 & = & 1 \\ x_1 & & & + & 3 \cdot x_3 & = & 1 \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge für $a = 3$ und $b = 1$.

(b) Bestimmen Sie jeweils alle $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, so dass das Gleichungssystem

- keine Lösung,
- genau eine Lösung bzw.
- unendlich viele Lösungen

hat.

Lösungsvorschlag

Der Gaußalgorithmus liefert für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} b & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & a-6 & -1 \\ 0 & 1 & 1-3b & 1-b \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & a-6 & -1 \\ 0 & 0 & 7-a-3b & 2-b \end{pmatrix}.$$

(a) Im Spezialfall $a = 3$ und $b = 1$ erhalten wir das LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

das heißt die Lösungsmenge besteht aus dem Vektor $(-2 \;\; 2 \;\; 1)^\top$.

(b)
- Das LGS ist nicht lösbar falls $7 - a - 3b = 0$ und $2 - b \neq 0$, da dann die letzte Zeile des LGS nicht erfüllt sein kann. Die Bedingung ist äquivalent zu $a + 3b = 7$ und $b \neq 2$.
- Das LGS hat genau eine Lösung, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix gleich dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix und gleich 3 ist. Dies ist genau dann der Fall wenn $a + 3b \neq 7$.
- Unendlich viele Lösungen erhalten wir, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix gleich dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix und kleiner gleich 2 ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $b = 2$ und $a + 3b = 7$ gilt, d.h. für $(a, b) = (1, 2)$.

Aufgabe I.4

Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V, W endlich dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume und $\Phi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

(i) Φ ist surjektiv.

(ii) Für jede Linearform $\beta : W \to \mathbb{K}$ gilt:
Ist $\beta \circ \Phi : V \to \mathbb{K}$ die Nullabbildung, so ist β die Nullabbildung.

Lösungsvorschlag

(i) $\Longrightarrow$ (ii)
Ist $\beta \circ \Phi : V \to \mathbb{K}$ die Nullabbildung, so gilt $(\beta \circ \Phi)(v) = 0$ für alle $v \in V$. Angenommen $\beta : W \to \mathbb{K}$ ist nicht die Nullabbildung. Dann gibt es $w \in W$ mit $\beta(w) \neq 0$. Da Φ surjektiv ist, gibt es $v \in V$ mit $\Phi(v) = w$; für dieses v gilt dann

$$(\beta \circ \Phi)(v) = \beta(w) \neq 0,$$

im Widerspruch zur Voraussetzung $\beta \circ \Phi = 0$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i)
Es sei $B = (b_1, b_2, \ldots b_n)$ eine Basis von V, $C = (c_1, c_2, \ldots c_m)$ eine Basis von $\text{Bild}(\Phi) \subset W$ (nach dem Dimensionssatz gilt $m \leq n$). Angenommen, Φ ist nicht surjektiv. Dann lässt sich C zu einer Basis $(c_1, c_2, \ldots, c_m, \ldots, c_k)$ von W ergänzen, wobei $k \geq m + 1$. Betrachte die Linearform $\beta : W \to \mathbb{K}$, die definiert ist durch

$$\begin{aligned} \beta(c_i) &= 0 \quad \text{für } \ i \leq m, \\ \beta(c_j) &= 1 \quad \text{für } \ j \geq m + 1. \end{aligned}$$

Dann gilt für jedes $v \in V$ $(\beta \circ \Phi)(v) = \beta(0) = 0$, das heißt $\beta \circ \Phi : V \to \mathbb{K}$ ist die Nullabbildung. Da $\beta : W \to \mathbb{K}$ aber nicht die Nullabbildung ist, erhalten wir einen Widerspruch zur Voraussetzung.

Aufgabe I.5

Es seien V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und Φ ein Endomorphismus von V.

(a) Geben Sie eine Definition der Begriffe „Eigenwert“ und „Eigenvektor“ an.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. Gilt $\Phi^2 = \Phi$, so hat Φ keine Eigenwerte außer 0 und 1.
2. Hat Φ^2 den Eigenwert λ^2, so hat Φ den Eigenwert λ.
3. Ist Φ bijektiv und λ Eigenwert von Φ, so ist λ^{-1} Eigenwert von Φ^{-1}.

Lösungsvorschlag

(a) $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt *Eigenwert* von Φ, wenn es einen Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ gibt mit der Eigenschaft

$$\Phi(v) = \lambda \cdot v.$$

Ein Vektor $v \in V$ heißt *Eigenvektor* von Φ, wenn $v \neq 0$ und es ein $\lambda \in \mathbb{K}$ gibt mit $\Phi(v) = \lambda \cdot v$.

(b)

1. Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von Φ, $v \in V \setminus \{0\}$ ein zugehöriger Eigenvektor. Dann gilt $\Phi(v) = \lambda v$ und $\Phi^2(v) = \Phi(\lambda v) = \lambda^2 v$, also nach Voraussetzung $\lambda = \lambda^2$ oder äquivalent
$$\lambda(\lambda - 1) = 0.$$
Es folgt also $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$ und damit ist die Aussage bewiesen.

2. Diese Aussage ist im Allgemeinen falsch: Betrachtet man $\Phi = -\mathrm{id}_V$, so hat Φ als einzigen Eigenwert $\lambda = -1$. $\Phi^2 = \mathrm{id}_V$ hat als einzigen Eigenwert $1 = 1^2$. Für einen Körper $\mathbb{K}$ mit Charakteristik ungleich 2 ist aber 1 kein Eigenwert von $\Phi = -\mathrm{id}_V$.

3. Da Φ injektiv ist, gilt $\{0\} = \ker(\Phi) = \ker(\Phi - 0 \cdot \mathrm{id}_V)$, das heißt 0 ist kein Eigenwert von Φ.

   Sei also $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ ein Eigenwert von Φ, $v \in V \setminus \{0\}$ ein zugehöriger Eigenvektor. Dann gilt für die Umkehrabbildung Φ^{-1} nach Definition
$$v = (\Phi^{-1}(\Phi(v)) = \Phi^{-1}(\lambda v) = \lambda \Phi^{-1}(v),$$
   wobei wir im letzten Schritt die Linearität von Φ^{-1} ausgenutzt haben. Daraus ergibt sich wegen $\lambda \neq 0$ $\Phi^{-1}(v) = \lambda^{-1} v$, das heißt v ist Eigenvektor von Φ^{-1} zum Eigenwert λ^{-1}. Insbesondere ist also λ^{-1} Eigenwert von Φ^{-1}.

Aufgabe I.6

Es seien $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Determinante der beiden Matrizen

$$A_n := \begin{pmatrix} 1+\alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 1+\alpha_2 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-1} & \cdots & \ddots & \alpha_{n-1} \\ \alpha_n & \alpha_n & \alpha_n & \cdots & 1+\alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

und $B_n = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$b_{ij} = \begin{cases} 0, & \textit{falls } i = j, \\ 1, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Lösungsvorschlag

Wir ziehen zunächst die erste Spalte von A_n von allen anderen ab und erhalten

$$\det(A_n) = \det(\begin{pmatrix} 1+\alpha_1 & -1 & -1 & -1 & \ldots & -1 \\ \alpha_2 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ \alpha_n & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}).$$

Diese Matrix hat die alte erste Spalte von A_n und ab Spalte 2 die folgenden Einträge: 1 auf der Diagonalen, -1 in der ersten Zeile und 0 sonst.

Zieht man hier für $i \in \{2, \ldots, n\}$ das α_i-fache der i-ten Spalte von der ersten ab, so ergibt sich am Ende $\det(A_n)$ als Determinante einer oberen Dreiecksmatrix:

$$\begin{aligned} \det(A_n) &= \det(\begin{pmatrix} 1+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\cdots+\alpha_n & -1 & -1 & \ldots & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i. \end{aligned}$$

Setzt man hier alle $\alpha_i = -1$, so ist $A_n = -B_n$. Das liefert

$$\det(B_n) = \det(-A_n) = (-1)^n \det(A_n) = (-1)^n(1-n).$$