Aufgabe II.1

Es sei $A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ eine Matrix mit höchstens zwei verschiedenen Eigenwerten $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, und $\widetilde{A} \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ ihre Jordansche Normalform. Weiter gelte $\operatorname{Rang}(A) = 2$ und $\operatorname{Spur}(A) = -2$.

(a) Begründen Sie, weshalb $\lambda = 0$ ein Eigenwert von A ist.

(b) Wieviele Jordankästchen zum Eigenwert $\lambda = 0$ besitzt $\widetilde{A}$?

(c) Begründen Sie, weshalb A einen Eigenwert $\mu \neq 0$ hat.

(d) Welche Zahlen können als Dimension des Hauptraums zum Eigenwert $\mu \neq 0$ auftreten?

(e) Bestimmen Sie alle Möglichkeiten für die Jordansche Normalform $\widetilde{A}$ von A unter den gegebenen Einschränkungen.

Lösungsvorschlag II.1

(a) Wegen $\operatorname{Rang}(A) = 2 < 5$ gilt

$$\dim\big(\ker(A - 0 \cdot I_5)\big) = \dim\ker(A) = 5 - 2 = 3 > 0,$$

das heißt 0 ist ein Eigenwert von A.

(b) Die Anzahl der Jordankästchen zum Eigenwert λ ist gleich der Dimension des Eigenraums zu λ. Nach Teil (a) hat $\widetilde{A}$ also drei Jordankästchen zum Eigenwert $\lambda = 0$.

(c) Die Spur ist eine Ähnlichkeitsinvariante, das heißt es gilt

$$\operatorname{Spur}(\widetilde{A}) = \operatorname{Spur}(A) = -2.$$

Die Spur von $\widetilde{A}$ ist gleich der Summe der Eigenwerte (mit Vielfachheit) von A. Wegen $\operatorname{Spur}(A) = -2 \neq 0$ muss es also noch mindestens einen Eigenwert ungleich Null geben.

(d) Die Matrix A hat höchstens zwei verschiedene Eigenwerte, also nach Teil (c) genau zwei Eigenwerte. Zusammen mit (a) folgt, dass die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes $\lambda = 0$ entweder 3 oder 4 ist. Damit ist die algebraische Vielfachheit von $\mu \neq 0$ entweder 2 oder 1. Die Dimension des Hauptraums zu μ ist gleich der algebraischen Vielfachheit von μ, also ebenfalls entweder 2 oder 1.

(e) Sei zunächst die algebraische Vielfachheit von $\lambda = 0$ gleich 3. Dann ist

$$-2 = \operatorname{Spur}(A) = 3 \cdot 0 + 2 \cdot \mu,$$

also $\mu = -1$. Abhängig davon, ob die Dimension des Eigenraums zu μ gleich 1 oder 2 ist, hat $\widetilde{A}$ folgende Gestalt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sei nun die algebraische Vielfachheit von $\lambda = 0$ gleich 4 und damit die algebraische Vielfachheit von $\mu \neq 0$ gleich 1. Zunächst folgt aus

$$-2 = \mathrm{Spur}(A) = 4 \cdot 0 + 1 \cdot \mu$$

$\mu = -2$. Da die Dimension des Eigenraums zu μ gleich 1 sein muss, hat $\widetilde{A}$ folgende Gestalt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe II.2

Auf $\mathbb{R}^3$ sei durch

$$s_\alpha : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto x^\top \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \alpha \\ 1 & \alpha & 3 \end{pmatrix} \cdot y$$

eine Bilinearform gegeben, die von einem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängt.

(a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist s_α ein Skalarprodukt?

(b) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die die Vektoren

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad und \quad y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

bezüglich s_α orthogonal sind.

(c) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ bezüglich s_1.

Lösungsvorschlag II.2

Es bezeichne $A_\alpha \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ die Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \alpha \\ 1 & \alpha & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) s_α ist genau dann ein Skalarprodukt, wenn A_α symmetrisch und positiv definit ist. Die Matrix A_α ist für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ symmetrisch. Es genügt also zu überprüfen, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die Matrix A_α positiv definit ist.

Nach dem Kriterium von Hurwitz ist dies genau dann der Fall, wenn die Determinanten der Hauptminoren positiv sind, also:

$$\det(1) = 1 > 0, \; \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right) = 1 > 0 \text{ und}$$

$$\det(A_\alpha) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \alpha \\ 1 & \alpha & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha - 1 \\ 0 & \alpha - 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$1 \cdot \big(1 \cdot 2 - (\alpha - 1)(\alpha - 1)\big) = 1 + 2\alpha - \alpha^2 > 0.$$

Die Nullstellen von $\alpha^2 - 2\alpha - 1$ sind nach der Lösungsformel für quadratische Gleichungen gerade

$$\frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2},$$

und daher ist s_α genau dann ein Skalarprodukt, wenn

$$1 - \sqrt{2} < \alpha < 1 + \sqrt{2}.$$

(b) Die Orthogonalität von x und y ist laut Definition äquivalent zu

$$0 = x^\top A_\alpha y = (0 \quad -\alpha \quad (-1-\alpha))y = -2\alpha + (1+\alpha) = \alpha - 1.$$

Dies gilt genau dann, wenn $\alpha = 1$ (und hier liegt ein Skalarprodukt vor).

(c) Nach Teil (b) sind x, y für s_1 bereits orthogonal. Wir brauchen noch einen Vektor, der zu beiden orthogonal ist und lösen dazu das LGS

$$x^\top A_1 z = y^\top A_1 z = 0.$$

Es ist $x^\top A_1 = (0 \quad -1 \quad -2)$, $y^\top A_1 = (3 \quad 5 \quad 1)$ und damit

$$z = (3 \quad -2 \quad 1)^\top$$

eine mögliche Wahl.

Nun müssen wir noch normieren und finden die Orthonormalbasis

$$\{x/\sqrt{3},\ y/\sqrt{15},\ z/\sqrt{10}\}.$$

Aufgabe II.3

Es sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum der Dimension $n \geq 1$, und $\Phi : V \to V$ ein Endomorphismus mit der Eigenschaft

$$\langle \Phi(x), x\rangle = 0 \qquad \text{für alle} \quad x \in V.$$

Zeigen Sie:

(a) Für alle $x, y \in V$ gilt $\langle \Phi(x), y\rangle = -\langle x, \Phi(y)\rangle$.

(b) Ist $U \subset V$ ein Φ-invarianter Untervektorraum, so ist auch $U^\perp$ Φ-invariant.

(c) Besitzt Φ einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist Φ nicht invertierbar.

(d) Der Endomorphismus $\Phi^2 : V \to V,\ x \mapsto \Phi(\Phi(x))$ ist selbstadjungiert.

(e) Es gibt eine Orthonormalbasis B von V und nichtpositive reelle Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, sodass die Abbildungsmatrix von Φ^2 bezüglich B gegeben ist durch

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}.$$

Lösungsvorschlag II.3

(a) Seien $x, y \in V$ beliebig. Dann gilt nach Voraussetzung

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \Phi(x+y), x+y\rangle = \langle \Phi(x) + \Phi(y), x+y\rangle \\ &= \langle \Phi(x), x\rangle + \langle \Phi(y), x\rangle + \langle \Phi(x), y\rangle + \langle \Phi(y), y\rangle \\ &= \langle \Phi(y), x\rangle + \langle \Phi(x), y\rangle. \end{aligned}$$

Dabei haben wir nacheinander die Linearität von Φ, die Bilinearität des Skalarproduktes sowie die Voraussetzung an Φ verwendet.

(b) Sei nun $y \in U^\perp$ beliebig. Dann gilt für alle $u \in U$ wegen $\Phi(u) \in U$

$$0 = \langle \Phi(u), y\rangle = -\langle u, \Phi(y)\rangle,$$

das heißt $\Phi(y) \in U^\perp$.

(c) Sei $x \neq 0$ ein Eigenvektor von Φ zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$0 = \langle \Phi(x), x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle,$$

also wegen $\langle x, x\rangle > 0$ notwendigerweise $\lambda = 0$. Wegen $E_0 \supseteq [x]$ und $E_0 = \ker(\Phi - 0 \cdot \mathrm{id}_V) = \ker(\Phi) \neq \{0\}$ ist Φ nicht injektiv, also insbesondere nicht invertierbar.

(d) Seien wieder $x, y \in V$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle \Phi^2(x), y\rangle &= \langle \Phi\big(\Phi(x)\big), y\rangle = -\langle \Phi(x), \Phi(y)\rangle \\ &= (-1)^2\langle x, \Phi\big(\Phi(y)\big)\rangle = \langle x, \Phi^2(y)\rangle. \end{aligned}$$

Somit ist Φ^2 selbstadjungiert.

(e) Da Φ^2 selbstadjungiert ist, gibt es eine Orthonormalbasis $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ aus Eigenvektoren von Φ^2. Für die zugehörigen Eigenwerte $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ gilt dann

$$\mu_i = \langle \mu_i b_i, b_i \rangle = \langle \Phi^2(b_i), b_i \rangle = -\langle \Phi(b_i), \Phi(b_i) \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } \ i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

wegen der positiven Definitheit des Skalarprodukts.

Aufgabe II.4

Gegeben sei die Matrix

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{6} & 1 \\ -\sqrt{6} & 2 & \sqrt{6} \\ 1 & -\sqrt{6} & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ x \mapsto A \cdot x$ eine Isometrie des euklidischen Standardraums $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist.

(b) Bestimmen Sie die euklidische Normalform $\widetilde{A}$ von A.

(c) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so dass $S^\top \cdot A \cdot S = \widetilde{A}$ gilt.

Lösungsvorschlag II.4

(a) Es gilt $A^\top A = I_3$, die Einheitsmatrix. Also ist A orthogonal.

(b) Da die Spur von A gleich 2 ist, kann -1 kein Eigenwert sein, denn sonst wäre A ähnlich zu einer orthogonalen Blockmatrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

in dem die orthogonale (2×2)-Matrix B Spur 3 haben müsste. Dies ist aber nicht möglich, da alle Einträge einer orthogonalen Matrix betragsmäßig nicht größer sind als 1. Bekanntlich zeigt dies, dass die Determinante von A gleich 1 ist.

Zudem ist 1 ein Eigenwert von A, und wir sehen an

$$A - I_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{6} & 1 \\ -\sqrt{6} & -2 & \sqrt{6} \\ 1 & -\sqrt{6} & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{6} & -1 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dass $(1\ \ 0\ \ 1)^\top$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist.

Da die euklidische Normalform den Eigenwert 1 auf der Diagonalen stehen hat, besitzt sie auch ein Drehkästchen mit Spur 1, also ist sie

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

(c) Die Basiswechselmatrix erhalten wir, indem wir den normierten Eigenvektor $\frac{\sqrt{2}}{2}(1\ \ 0\ \ 1)^\top$ zum Eigenwert 1 zu einer Orthonormalbasis ergänzen und deren Spalten in S schreiben. Dabei müssen wir nur noch auf die Vorzeichen bei den Sinus-Einträgen im Drehkästchen aufpassen.

Eine Orthonormalbasis ergibt sich leicht durch Ausprobieren, die zugehörige Matrix ist etwa

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Nachrechnen zeigt, dass auch das Vorzeichen bei $\sqrt{3}/2$ stimmt.

Aufgabe II.5

Es seien V ein endlich dimensionaler unitärer Vektorraum und $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus, sodass für die zu Φ adjungierte Abbildung Φ^* gilt:

$$\Phi^* = 2\Phi^2 - \Phi.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\Phi^* \circ \Phi = \Phi \circ \Phi^*$ gilt.

(b) Welche komplexen Zahlen können als Eigenwerte von Φ auftreten?

(c) Zeigen Sie, dass Φ eine orthogonale Projektion ist.

Hinweis zu (c): Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass V eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von Φ besitzt.

Lösungsvorschlag II.5

(a) Es gilt

$$\Phi^* \circ \Phi = (2\Phi^2 - \Phi) \circ \Phi = 2\Phi^3 - \Phi^2 = \Phi \circ (2\Phi^2 - \Phi) = \Phi \circ \Phi^*.$$

(b) Da V eine Orthonormalbasis B aus Eigenvektoren von Φ besitzt ist die Abbildungsmatrix von Φ bezüglich B eine Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

wobei $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ die Eigenwerte von Φ sind. Die Abbildungsmatrix von Φ^* bezüglich B ist

$$D^* = \begin{pmatrix} \overline{\lambda}_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \overline{\lambda}_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \overline{\lambda}_n \end{pmatrix},$$

da B eine Orthonormalbasis ist. Hier muss auch die Gleichheit

$$D^* = 2D^2 - D$$

gelten, und das bedeutet für den Eigenwert $\lambda_k = x + \mathrm{i}y$

$$x - \mathrm{i}y = 2(x + \mathrm{i}y)^2 - (x + \mathrm{i}y) = 2x^2 - 2y^2 - x + \mathrm{i}(2xy - y).$$

Der Vergleich der Imaginärteile zeigt $xy = 0$, also $x = 0$ oder $y = 0$.

Im Fall $x = 0$ zeigt der Vergleich der Realteile, dass auch $y = 0$ gilt.

Im Fall $y = 0$ erhalten wir aus der Bedingung an die Realteile die Gleichung

$$2x^2 - x = x, \quad \text{also} \quad 0 = 2x^2 - 2x = 2x(x-1).$$

Daher sind die einzig möglichen Eigenwerte 0 und 1.

(c) V ist die direkte Summe der Eigenräume zu den Eigenwerten 0 und 1. Ist also $v = v_0 + v_1$ eine dazu passende Zerlegung von $v \in V$, so gilt $\Phi(v) = v_1$.

Also ist Φ die orthogonale Projektion auf den Eigenraum zum Eigenwert 1.

Aufgabe II.6

In Abhängigkeit von dem Parameter $a \in \mathbb{R}$ sei die affine Abbildung $\phi_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\phi_a(x) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a-2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist ϕ_a eine Affinität?

(b) Bestimmen Sie alle Parameter $a \in \mathbb{R}$, für die es genau ein $x_a \in \mathbb{R}^3$ gibt mit $\phi_a(x_a) = x_a$. Geben Sie für diese Parameter den Punkt x_a an.

(c) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist der lineare Anteil von ϕ_a nicht diagonalisierbar?

(d) Bestimmen Sie alle Parameter $a \in \mathbb{R}$, für die ϕ_a eine Affinität ist und für welche es genau einen Punkt $x_a \in \mathbb{R}^3$ und genau zwei Geraden $g_a, h_a \subseteq \mathbb{R}^3$ gibt mit

$$\phi_a(x_a) = x_a, \quad \phi_a(g_a) \subseteq g_a \quad \text{und} \quad \phi_a(h_a) \subseteq h_a.$$

Lösungsvorschlag II.6

(a) Entwicklung nach der ersten Zeile zeigt: Das charakteristische Polynom des linearen Anteils von ϕ_a ist das Polynom

$$(X-a)\cdot(X-(a-2))\cdot(X-3).$$

ϕ_a ist genau dann eine Affinität, wenn der lineare Anteil invertierbar ist, also nicht Eigenwert 0 hat, wenn also a weder 0 noch 2 ist. Somit ist ϕ_a für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0,2\}$ eine Affinität.

(b) Die Gleichung $\phi_a(x_a) = x_a$ ist äquivalent zum inhomogenen LGS

$$\begin{pmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ 0 & a-3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} x_a = -\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Gesucht sind also diejenigen Parameter $a \in \mathbb{R}$, für die das obige LGS genau eine Lösung besitzt. Dies ist genau dann der Fall, wenn die (quadratische) Koeffizientenmatrix invertierbar ist, also wenn

$$0 \neq \begin{vmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ 0 & a-3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (a-1)(a-3)\cdot 2$$

gilt. Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{1,3\}$ gibt es also genau ein $x_a \in \mathbb{R}^3$ mit $\phi_a(x_a) = x_a$. Der Punkt x_a heißt *Fixpunkt* von ϕ_a.

Wir berechnen weiter für $a \in \mathbb{R} \setminus \{1,3\}$ mit Hilfe des Gaußalgorithmus

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a-1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & a-3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{a-1} \\ 0 & 1 & \frac{1}{a-3} & -\frac{2}{a-3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a-1} \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2a+2}{(a-3)(a-1)} - \frac{1}{(a-3)(a-1)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a-1} \end{array}\right).$$

Somit folgt

$$x_a = \frac{1}{(a-1)(a-3)} \begin{pmatrix} -a+3 \\ -2a+1 \\ a-3 \end{pmatrix}.$$

(c) Ein trigonalisierbarer Endomorphismus ist genau dann *nicht* diagonalisierbar, wenn er einen Eigenwert besitzt, für den die algebraische Vielfachheit strikt größer als die geometrische Vielfachheit ist.

Da das charakteristische Polynom des linearen Anteils Ψ_a von ϕ_a unabhängig von a in reelle Linearfaktoren zerfällt, ist Ψ_a trigonalisierbar. Damit Ψ_a nicht diagonalisierbar ist, muss notwendigerweise $a = 3$ oder $a - 2 = 3$ gelten (sonst hätte Ψ_a drei verschiedene Eigenwerte). Weiter gilt für den Eigenraum E_3 von Ψ_a zum Eigenwert 3

$$E_3 = \ker\Big(\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a-2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 3I_3\Big) = \ker\Big(\begin{pmatrix} a-3 & 0 & 0 \\ 0 & a-5 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Big).$$

Sowohl für $a = 3$ als auch für $a = 5$ ist $\dim E_3 = 1$, das heißt die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts 3 ist in beiden Fällen strikt größer als die geometrische Vielfachheit. Damit ist der lineare Anteil von ϕ_a genau für $a \in \{3, 5\}$ nicht diagonalisierbar.

(d) Damit ϕ_a eine Affinität ist, muss der lineare Anteil invertierbar sein, das heißt $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ gelten. Nach (b) muss weiter $a \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$ gelten.

Wäre der lineare Anteil von ϕ_a diagonalisierbar, so hätten wir eine Basis aus Eigenvektoren v_1, v_2, v_3 im Translationsvektorraum, und die Geraden g_a, h_a, k_a durch den Fixpunkt x_a mit diesen Richtungen wären *drei* Geraden mit

$$\phi_a(g_a) \subseteq g_a, \quad \phi_a(h_a) \subseteq h_a \quad \text{und} \quad \phi_a(k_a) \subseteq k_a.$$

Φ_a darf also nicht diagonalisierbar sein, d.h. es muss $a = 3$ oder $a = 5$ gelten. Insgesamt bleibt als Möglichkeit nur $a = 5$ übrig. Die gesuchten Geraden g_5 und h_5 enthalten jeweils den Fixpunkt $x_5 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix}$ und als Richtungsvektor jeweils einen Eigenvektor zum Eigenwert 3 bzw. $a = 5$.