Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Dipl.-Math. Oliver Bauer

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Übungsblatt 3 **Wintersemester 2008/2009**

Aufgabe 1

Es seien A, B_1, B_2 Mengen und $\mathcal{M}$ ein nichtleeres Mengensystem. Zeigen Sie:

(a) $A \times (B_1 \cap B_2) = (A \times B_1) \cap (A \times B_2)$.

(b) $\mathcal{P}(\bigcup_{B\in\mathcal{M}} B) \supset \bigcup_{B\in\mathcal{M}} \mathcal{P}(B)$.

(c) In (b) gilt die umgekehrte Inklusion („$\subset$“) im Allgemeinen nicht.

Aufgabe 2

Es seien A und B Mengen und $f : A \to B$ eine Abbildung.

Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Eigenschaften:

(a) f ist injektiv.

(b) Für alle $X, Y \subset A$ gilt: $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

(c) Für alle $X \subset Y \subset A$ gilt: $f(Y \setminus X) = f(Y) \setminus f(X)$.

Aufgabe 3

Gegeben sei die Abbildung

$$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \quad (x, y) \mapsto (2x + 3y, 3x + 4y).$$

Zeigen Sie, dass f bijektiv ist, berechnen Sie das Urbild von $(1, 0)$ und $(0, 1)$ und bestimmen Sie die Umkehrabbildung.

Aufgabe 4

(a) Auf der Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sei sei eine Relation $\sim$ gegeben durch

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \;:\Leftrightarrow\; x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist und skizzieren Sie die Äquivalenzklasse von $(-1, 2)$.

(b) Auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ sei eine Relation $\sim$ gegeben durch

$$(z_1, n_1) \sim (z_2, n_2) \;:\Leftrightarrow\; z_1 n_2 = z_2 n_1.$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, und geben Sie eine bijektive Abbildung von der Menge M der Äquivalenzklassen, $M = \{\widetilde{(z, n)} \mid (z, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\}$, auf die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen an.

Einwurf der Lösungen bis zum 10.11.2008, 13:00 Uhr, in einen der Einwurfkästen im dritten Stock des Mathematik-Gebäudes 20.30 neben dem Seminarraum S32. Jede Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet. Die Übungsblätter stehen auch unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/la_mathe2008w/

zum Download bereit.