Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Dipl.-Math. Oliver Bauer

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Übungsblatt 4 **Wintersemester 2008/2009**

Aufgabe 1

(a) Es sei

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in S_4.$$

Bestimmen Sie $\sigma^n := \sigma \circ \cdots \circ \sigma$ (n Faktoren), wobei n das Geburtsjahr von Carl Friedrich Gauß ist.

(b) Stellen Sie folgende Permutationen durch Transpositionen dar und bestimmen Sie jeweils die Fehlstandszahl:

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

Es seien $(G, \bullet)$ und $(H, *)$ Gruppen, deren neutrale Elemente wir mit e_G bzw. e_H bezeichnen.

Weiter sei $\Phi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Als den *Kern* von Φ bezeichnen wir die Menge

$$\text{Kern } \Phi := \{g \in G \mid \Phi(g) = e_H\}.$$

(a) Zeigen Sie:

  (i) Kern Φ ist eine Untergruppe von G.

  (ii) Φ ist genau dann injektiv, wenn Kern $\Phi = \{e_G\}$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge $G \times H$ mit der Verknüpfung

$$(g_1, h_1) \star (g_2, h_2) := (g_1 \bullet g_2, h_1 * h_2)$$

eine Gruppe ist. Sie wird *direktes Produkt* von G und H genannt.

Zeigen Sie weiter, dass die Abbildung

$$\Phi : (G \times H, \star) \to (G, \bullet), \quad (g, h) \mapsto g,$$

ein Homomorphismus ist. Bestimmen Sie außerdem den Kern von Φ.

Bitte wenden!

Aufgabe 3

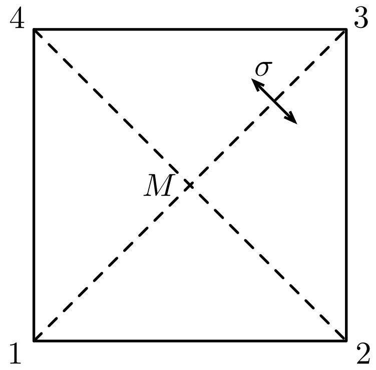
Sei $E \subset \mathbb{R}^2$ die Menge der Ecken eines Quadrats mit Mittelpunkt M. Sei weiter

- τ eine Selbstabbildung von E, die durch eine Drehung um 90° um M gegen den Uhrzeigersinn gegeben ist,
- σ eine Selbstabbildung von E, die durch die Spiegelung an einer Diagonalen gegeben ist.

Durch Nummerierung der Ecken können wir σ und τ als Permutationen aus S_4 auffassen.

(a) Zeigen Sie: $\sigma^2 = \mathrm{id}$, $\tau^4 = \mathrm{id}$ und $\tau \circ \sigma \circ \tau = \sigma$.

(b) Bestimmen Sie die von σ und τ erzeugte Untergruppe von S_4 und stellen Sie die Verknüpfungstafel auf.



Aufgabe 4

Bereits bekannt sind die Gruppen $G_1 := \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und das direkte Produkt $G_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Zeigen Sie mit Hilfe von Verknüpfungstafeln der Form

$*$	e	a	b	c
e				
a				
b				
c				

,

dass G_1 und G_2 die einzigen endlichen Gruppen mit vier Elementen sind (bis auf Umbenennung der Elemente). Hierbei bezeichne e stets das neutrale Element.

Hinweis: Verwenden Sie, dass in der Verknüpfungstafel einer endlichen Gruppe jedes Element in jeder Zeile und jeder Spalte genau einmal vorkommt. (Können Sie dies begründen?)

Einwurf der Lösungen bis zum 17.11.2008, 13:00 Uhr, in einen der Einwurfkästen im dritten Stock des Mathematik-Gebäudes 20.30 neben dem Seminarraum S32. Jede Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet. Die Übungsblätter stehen auch unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/la_mathe2008w/

zum Download bereit.