Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Dipl.-Math. Oliver Bauer

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Übungsblatt 5 **Wintersemester 2008/2009**

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei R ein Ring und

$$T_n(R) := \{A = (a_{ij}) \in R^{n\times n} \mid a_{ij} = 0 \text{ für alle } i, j \in \{1, \dots, n\} \text{ mit } i > j\}$$

die Menge der oberen Dreiecksmatrizen. Zeigen Sie:

(a) $T_n(R)$ ist ein Ring mit der üblichen Addition und Multiplikation von Matrizen.

(b) Für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ ist $\varphi_k : T_n(R) \to R$, $(a_{ij}) \mapsto a_{kk}$ ein Ringhomomorphismus.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Eins. Die *Einheitengruppe* R^* von R ist definiert als

$$R^* := \{x \in R \mid \text{es gibt } y \in R \text{ mit } x \cdot y = 1 = y \cdot x\},$$

also ist R^* die Menge der bzgl. der Multiplikation invertierbaren Elemente von R.

(a) Bestimmen Sie $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{R}^*$ und $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*$.

(b) Zeigen Sie: Ist S ein weiterer Ring mit Eins und $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus, so wird R^* in S^* abgebildet. Kurz:
$$\varphi(R^*) \subset S^*.$$

(c) Zeigen Sie, dass es keinen Ringhomomorphismus $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ geben kann.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Bestimmen Sie alle Einheiten und Nullteiler der Ringe $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$.

Welche der beiden Einheitengruppen sind zyklisch?

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Menge
$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{x + \sqrt{2} \cdot y \mid x, y \in \mathbb{Q}\} \subsetneq \mathbb{R}$$
mit den üblichen Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ ein Körper ist.

Einwurf der Lösungen bis zum 24.11.2008, 13:00 Uhr, in einen der Einwurfkästen im dritten Stock des Mathematik-Gebäudes 20.30 neben dem Seminarraum S32. Jede Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet. Die Übungsblätter stehen auch unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/la_mathe2008w/

zum Download bereit.