Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Dipl.-Math. Oliver Bauer

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Übungsblatt 6 **Wintersemester 2008/2009**

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Welche der reellen Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sind invertierbar und wie lautet die inverse Matrix?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $a, b, c \in \mathbb{K}$ und

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ein Polynom

$$f := s_0 + s_1 X + s_2 X^2 + X^3 \in \mathbb{K}[X],$$

so dass

$$f(A) = 0$$

gilt.

Hinweis: Beim Einsetzen von A in f ist der konstante Koeffizient als $s_0 E$ zu verstehen, wobei E die 3×3-Einheitsmatrix ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Gegeben sei die Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine Matrix $A_{13}(5)$ an, so dass das Produkt $A_{13}(5)B$ die Matrix ist, die aus B entsteht, indem man zur 1. Zeile von B das 5-fache der 3. Zeile von B addiert.

(b) Geben Sie eine Matrix $A_{ij}(\lambda) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ an, so dass für eine beliebige Matrix $C \in \mathbb{K}^{n \times p}$ das Produkt

$$A_{ij}(\lambda)C$$

die Matrix ist, die aus C entsteht, indem man zur i-ten Zeile von C das λ-fache der j-ten Zeile von C addiert.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $f \in \mathbb{K}[X]$ ein Polynom mit $\deg f = n \in \mathbb{N}$.

Eine *Nullstelle* von f ist ein Element α, das $f(\alpha) = 0$ erfüllt.

Zeigen Sie:

(a) Ist $\alpha \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von f in $\mathbb{K}$, so gibt es ein Polynom $g \in \mathbb{K}[X]$ mit $f = (X - \alpha) \cdot g$.

(b) f hat in $\mathbb{K}$ höchstens n Nullstellen.

(c) Zeigen Sie, dass das Polynom $X^2 - b$ mit $b \in \mathbb{Q}$ unendlich viele Nullstellen in $\mathbb{Q}^{2\times 2}$ hat.

Einwurf der Lösungen bis zum 1.12.2008, 13:00 Uhr, in einen der Einwurfkästen im dritten Stock des Mathematik-Gebäudes 20.30 neben dem Seminarraum S32. Jede Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet. Die Übungsblätter stehen auch unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/la_mathe2008w/

zum Download bereit.