Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Dipl.-Math. Oliver Bauer

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Übungsblatt 7 **Wintersemester 2008/2009**

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Welche sind falsch? Begründen Sie jeweils die Antwort!

(a) $V_1 := \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{R}) \mid \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^2 \text{ konvergiert}\}$ mit der Addition und Skalarmultiplikation für Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(b) $V_2 := \mathbb{Z}$ mit der üblichen Addition und der Skalarmultiplikation, die gegeben sei durch $0 \cdot z := 0$ und $1 \cdot z := z$ für alle $z \in \mathbb{Z}$, ist ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(c) $V_3 := \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$ mit der üblichen Multiplikation als Vektoraddition und der Skalarmultiplikation $\lambda \odot v := v^\lambda$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(d) $V_4 := \{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x^2 = -y^2\}$ mit der von $\mathbb{Q}^2$ geerbten Addition und Skalarmultiplikation ist ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Im Vektorraum $\mathbb{R}^4$ seien in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ t \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Bestimmen Sie eine linear unabhängige Teilmenge von $\{v_1, v_2, v_3\}$ und ergänzen Sie diese zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge

$$\{3X - X^5,\ 4X + X^3,\ 5X - X^5 - X^6\}$$

in $\mathbb{Q}[X]$ linear unabhängig ist.

Erweitern Sie diese Menge zu einer Basis von $\{f \in \mathbb{Q}[X] \mid \deg f \leq 9\}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Fassen Sie $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum auf und beweisen Sie, dass die Elemente

$$1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$$

über $\mathbb{Q}$ linear unabhängig sind.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Betrachten Sie die folgende Teilmenge der komplexen Matrizen:

$$V := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ und } a + d \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass V *kein* komplexer Vektorraum ist.

(b) Zeigen Sie, dass V ein *reeller* Vektorraum ist.

(c) Geben Sie eine Basis von V als $\mathbb{R}$-Vektorraum an.

Einwurf der Lösungen bis zum 8.12.2008, 13:00 Uhr, in einen der Einwurfkästen im dritten Stock des Mathematik-Gebäudes 20.30 neben dem Seminarraum S32. Jede Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet. Die Übungsblätter stehen auch unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/la_mathe2008w/

zum Download bereit.