Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Dipl.-Math. Oliver Bauer

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Übungsblatt 8 **Wintersemester 2008/2009**

Aufgabe 1

Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ sei eine Funktion $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_\alpha(x) := \begin{cases} (\alpha - x)^3 & \text{falls } x \le \alpha \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie: Die Menge $\{f_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ ist linear unabhängig im Vektorraum $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Aufgabe 2

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum sowie M_1 und M_2 Teilmengen von V. Zeigen Sie:

(a) $[M_1 \cap M_2] \subset [M_1] \cap [M_2]$.

(b) In (a) gilt im Allgemeinen keine Gleichheit.

(c) $[M_1 \cup M_2] = \Big[[M_1] \cup [M_2]\Big]$.

(d) $[M_1 \cup M_2] = [M_1] \cup [M_2] \Leftrightarrow [M_1] \subset [M_2]$ oder $[M_2] \subset [M_1]$.

Aufgabe 3

(a) Es seien im $\mathbb{R}^4$ die Basen

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad \overline{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

gegeben.

Bestimmen Sie die Übergangsmatrix des Basiswechsels $\overline{B} \hookleftarrow B$.

(b) Für den Vektorraum der Polynome in $\mathbb{R}[X]$ vom Grad ≤ 3 seien folgende Basen gegeben:

$$B := \{1-X^2+X^3,\ X-X^2,\ 1-X+X^2,\ 1-X\} \quad \text{und} \quad \overline{B} := \{1-X^3,\ 1-X^2,\ 1-X,\ 1+X^2-X^3\}.$$

Außerdem sei $B_0 := \{1, X, X^2, X^3\}$.

Geben Sie die folgenden Darstellungen der Basen im $\mathbb{R}^4$ an (vgl. Abschnitt 7.3 im Skript):

$$\begin{aligned} &\Theta_{B_0}(v) \text{ für } v \in B, \\ &\Theta_{B_0}(v) \text{ für } v \in \overline{B}, \\ &\Theta_{B}(v) \text{ für } v \in B_0, \\ &\Theta_{\overline{B}}(v) \text{ für } v \in B_0. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie außerdem die Übergangsmatrix des Basiswechsels $\overline{B} \hookleftarrow B$.

Bitte wenden!

Aufgabe 4

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basis B, und $M \subset V$ sei eine endliche linear unabhängige Teilmenge. Zeigen Sie, dass es eine Teilmenge $A \subset B$ gibt, so dass $(B \setminus A) \cup M$ eine Basis von V ist.

Einwurf der Lösungen bis zum 15.12.2008, 13:00 Uhr, in einen der Einwurfkästen im dritten Stock des Mathematik-Gebäudes 20.30 neben dem Seminarraum S32. Jede Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet. Die Übungsblätter stehen auch unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/la_mathe2008w/

zum Download bereit.