Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Dipl.-Math. Oliver Bauer

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Übungsblatt 9 **Wintersemester 2008/2009**

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $V := \mathbb{F}_3^5$. Darin seien die Untervektorräume U_1 und U_2 folgendermaßen gegeben:

$$U_1 := \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right], \qquad U_2 := \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

(a) Berechnen Sie eine Basis von $U_1 \cap U_2$.

(b) Bestimmen Sie eine Basis von $U_1 + U_2$ und einen Untervektorraum W von V mit

$$U_1 + U_2 = (U_1 \cap U_2) \oplus W.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $U_1, \ldots, U_n$ Untervektorräume von V und $W := U_1 + \cdots + U_n$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt:

$$W = \{u_1 + \cdots + u_n \mid u_1 \in U_1, \ldots, u_n \in U_n\}.$$

(b) Für $n \geq 2$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) Die Summe $W = U_1 + \cdots + U_n$ ist direkt.

(ii) Aus

$$u_1 + \cdots + u_n = 0 \qquad (u_i \in U_i,\ i = 1, \ldots, n)$$

folgt $u_1 = \cdots = u_n = 0$.

(iii) Für jedes $w \in W$ ist die Zerlegung

$$w = u_1 + \cdots + u_n \qquad (u_i \in U_i,\ i = 1, \ldots, n)$$

eindeutig bestimmt.

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit char $\mathbb{K} \neq 2$.

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt *symmetrisch*, wenn $A = A^\top$ gilt.

Eine Matrix heißt *schiefsymmetrisch* oder *alternierend*, wenn $A = -A^\top$ gilt.

Zeigen Sie:

(a) Die Menge $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{K})$ der symmetrischen Matrizen bildet einen Untervektorraum von $\mathbb{K}^{n\times n}$.

(b) Die Menge $\mathrm{Alt}_n(\mathbb{K})$ der schiefsymmetrischen Matrizen bildet einen Untervektorraum von $\mathbb{K}^{n\times n}$.

(c) Für $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist $A + A^\top$ symmetrisch.

(d) Für $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist $A - A^\top$ schiefsymmetrisch.

(e) Jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ lässt sich in einen symmetrischen und einen schiefsymmetrischen Teil zerlegen, d.h.

$$A = A_\mathrm{s} + A_\mathrm{a}$$

mit $A_\mathrm{s} \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{K})$ und $A_\mathrm{a} \in \mathrm{Alt}_n(\mathbb{K})$.

(f) Es gilt

$$\mathbb{K}^{n\times n} = \mathrm{Sym}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathrm{Alt}_n(\mathbb{K}).$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

(a) Geben Sie alle eindimensionalen Untervektorräume von $\mathbb{F}_3^3$ an.

(b) Es sei p eine Primzahl. Wieviele eindimensionale Untervektorräume enthält $\mathbb{F}_p^n$?

Einwurf der Lösungen bis zum 22.12.2008, 13:00 Uhr, in einen der Einwurfkästen im dritten Stock des Mathematik-Gebäudes 20.30 neben dem Seminarraum S32. Jede Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet. Die Übungsblätter stehen auch unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/la_mathe2008w/

zum Download bereit.