Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Dipl.-Math. Oliver Bauer

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Übungsblatt 10 **Wintersemester 2008/2009**

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{5\times 5}.$$

Bestimmen Sie für alle $k \in \mathbb{N}$ den Rang von A^k.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Im Vektorraum $\mathbb{Q}^3$ sei der Untervektorraum

$$U := \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

gegeben. Damit werde der Faktorraum $\mathbb{Q}^3/U$ gebildet.

(a) Geben Sie für die Vektoren

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad y := \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix}$$

die Klassen $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\widetilde{3x+y}$ und $\tilde{x} - 2\tilde{y}$ an.

(b) Bestimmen Sie eine Basis B von $\mathbb{Q}^3/U$.

(c) Stellen Sie die Vektoren

$$\widetilde{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \widetilde{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \in \mathbb{Q}^3/U$$

bzgl. der Basis B dar. Sind diese beiden Vektoren linear unabhängig?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Begründen Sie ihre Antwort.

(a) $\Phi_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad v \mapsto a \times v$. Dabei sei $a \in \mathbb{R}^3$ fest gewählt und $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}.$$

(b) $\Phi_2 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], \quad \sum_{i=0}^n a_i X^i =: f \mapsto f' := \sum_{i=1}^n i a_i X^{i-1}$.

(c) $\Phi_3 : \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \to \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \quad (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto (b_i)_{i\in\mathbb{N}}$, wobei $b_i := a_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

(d) $\Phi_4 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto cz$. Dabei sei $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum aufgefasst und $c \in \mathbb{C}$ fest gewählt.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es seien in $\mathbb{R}^3$ die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},\ v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix},\ v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ w_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ w_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass es genau eine lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gibt mit $\Phi(v_i) = w_i$ für $i = 1, \ldots, 3$.

(b) Bestimmen Sie Kern(Φ) sowie die Dimension von Bild(Φ).

(c) Zeigen Sie, dass $\Phi \circ \Phi = \Phi$ gilt.

Einwurf der Lösungen bis zum 19.1.2009, 13:00 Uhr, in einen der Einwurfkästen im dritten Stock des Mathematik-Gebäudes 20.30 neben dem Seminarraum S32. Jede Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet. Die Übungsblätter stehen auch unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/la_mathe2008w/

zum Download bereit.