Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Dipl.-Math. Oliver Bauer

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Übungsblatt 11 **Wintersemester 2008/2009**

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n\times p}$. Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{Rg}(AB) \leq \min(\operatorname{Rg} A, \operatorname{Rg} B)$

(b) Ist $AB = O$, so gilt $\operatorname{Rg} A + \operatorname{Rg} B \leq n$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $B := \{b_1, \ldots, b_5\}$ eine Basis eines reellen Vektorraums V und Φ ein Endomorphismus von V mit

$$\begin{array}{rcrrrrr}
\Phi(b_1) & = & 4b_1 & +2b_2 & & -2b_4 & -3b_5, \\
\Phi(b_2) & = & & & -2b_3 & & +b_5, \\
\Phi(b_3) & = & & -4b_2 & +2b_3 & & -b_5, \\
\Phi(b_4) & = & -2b_1 & & +3b_3 & +b_4 & -b_5, \\
\Phi(b_5) & = & & 3b_2 & & & +2b_5.
\end{array}$$

(a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrizen von Φ und $\Phi \circ \Phi$ bezüglich B.

(b) Zeigen Sie: Die Menge $C := \{c_1, c_2, c_3\}$, bestehend aus den Vektoren

$$c_1 := b_2 + b_3 + b_5, \qquad c_2 := -b_3 + b_5, \qquad c_3 := b_2 + b_5,$$

ist Basis eines Untervektorraums U von V mit $\Phi(U) \subset U$.

(c) Berechnen Sie die Abbildungsmatrix des Endomorphismus $\Phi|_U : U \to U$ (das ist die Einschränkung von Φ auf U) bezüglich C.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei eine lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$\Phi(x) := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot x$$

gegeben. Bestimmen Sie eine geordnete Basis B von $\mathbb{R}^4$ und eine geordnete Basis C von $\mathbb{R}^3$, so dass Φ bzgl. der Basen B und C die Abbildungsmatrix

$$\Theta_{CB}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hat.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei V der Vektorraum der reellen Polynomfunktionen vom Grad höchstens m. Das sind Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$$

mit $a_0 \ldots, a_m \in \mathbb{R}$. Nun werde mit fest gewählten, paarweise verschiedenen $x_0, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$ die Menge $B^\star := \{\Phi_0, \ldots, \Phi_m\}$ gebildet, bestehend aus den Linearformen $\Phi_i : V \to \mathbb{R}$ mit

$$f \mapsto \Phi_i(f) := f(x_i) \qquad (i = 0, \ldots, m).$$

(a) Zeigen Sie, dass $B^\star$ eine Basis des Dualraums $V^\star$ ist.

(b) Für das Folgende sei nun $m = 3$ und $x_i = i - 1$ $(i = 0, \ldots, 3)$ gewählt. Bestimmen Sie die Basis $B = \{g_0, \ldots, g_3\}$ von V, die $B^\star$ als Dualbasis hat.

(c) Stellen Sie die Linearform $\Psi : V \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f \mapsto \Psi(f) := \int_{-1}^{1} f(x)dx,$$

als Linearkombination von $\Phi_0, \ldots, \Phi_3$ dar.

Einwurf der Lösungen bis zum 26.1.2009, 13:00 Uhr, in einen der Einwurfkästen im dritten Stock des Mathematik-Gebäudes 20.30 neben dem Seminarraum S32. Jede Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet. Die Übungsblätter stehen auch unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/la_mathe2008w/

zum Download bereit.