Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Dipl.-Math. Oliver Bauer

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Übungsblatt 12 **Wintersemester 2008/2009**

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $B := \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine (geordnete) Basis von V und $\Phi : V \to V$ linear.

Offenbar sind dann für $i \neq j$ auch

$$\overline{B}_1 := \{b_1, \ldots, b_{i-1}, b_i + \lambda b_j, b_{i+1}, \ldots, b_n\}$$

mit $\lambda \in \mathbb{K}$ (wobei natürlich $\lambda \neq -1$ im Fall $i = j$ sein soll) und

$$\overline{B}_2 := \{b_1, \ldots, b_{i-1}, b_j, b_{i+1}, \ldots, b_{j-1}, b_i, b_{j+1}, \ldots, n\}$$

Basen von V (hierbei ist zu beachten, dass B und $\overline{B}_2$ sich nicht als Menge, aber durch die Anordnung der Basisvektoren unterscheiden).

(a) Gegeben sei $\Theta_{BB}(\Phi)$. Bestimmen Sie damit $\Theta_{B\overline{B}_1}(\Phi)$, $\Theta_{B\overline{B}_2}(\Phi)$, $\Theta_{\overline{B}_1 B}(\Phi)$ und $\Theta_{\overline{B}_2 B}(\Phi)$.

(b) Sei speziell $V = \mathbb{R}^3$ und B die Standardbasis. Die lineare Abbildung Φ sei gegeben durch

$$\Theta_{BB}(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Basis C von $\mathbb{R}^3$, sodass $\Theta_{CB}(\Phi)$ die Gauß-Normalform von $\Theta_{BB}(\Phi)$ ist.

Hinweis: Erinnern Sie sich an Aufgabe 3 von Blatt 6.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $V^\star$ der Dualraum von V und $\varphi, \psi \in V^\star$.

Weiter sei die Abbildung $\Phi : V \to \mathbb{K}^2$ gegeben durch $\Phi(v) := \begin{pmatrix} \varphi(v) \\ \psi(v) \end{pmatrix}$.

(a) Zeigen Sie, dass Φ linear ist.

(b) Zeigen Sie, dass Φ genau dann surjektiv ist, wenn φ und ψ linear unabhängig sind.

(c) Seien nun speziell $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $\varphi(x, y, z) := -2x + y + z$ und $\psi(x, y, z) := 5y$.

Bestimmen Sie eine Basis von $V/\mathrm{Kern}(\Phi)$ und geben Sie die Abbildungsmatrix des induzierten Homomorphismus $\tilde{\Phi} : V/\mathrm{Kern}(\Phi) \to \mathbb{R}^2$ bezüglich dieser Basis und der Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ an.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und Φ ein Endomorphismus von V.

(a) Zeigen Sie:

Besitzt Φ bzgl. jeder Basis von V dieselbe Abbildungsmatrix, so gibt es ein $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $\Phi = \lambda \mathrm{id}_V$.

(b) Es sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine Matrix, die mit allen Matrizen $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ vertauscht, d.h. $AB = BA$ für alle $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

Folgern Sie aus Teil (a), dass A von der Form λE_n für ein $\lambda \in \mathbb{K}$ ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es seien im $\mathbb{R}^4$ die Basen

$$B := \left\{ b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\overline{B} := \left\{ \overline{b}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \overline{b}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{b}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{b}_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

und im $\mathbb{R}^3$ die Basen

$$C := \left\{ c_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, c_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, c_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\overline{C} := \left\{ \overline{c}_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \overline{c}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{c}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

gegeben.

Weiter sei durch

$$\begin{array}{rcrcrcr} \Psi(b_1) & = & -3c_1 & & & + & 2c_3, \\ \Psi(b_2) & = & 7c_1 & + & c_2 & + & c_3, \\ \Psi(b_3) & = & & & c_2 & + & c_3, \\ \Psi(b_4) & = & c_1 & & & & \end{array}$$

eine lineare Abbildung $\Psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ gegeben.

Geben Sie die Abbildungsmatrizen $\Theta_{CB}(\Psi)$ und $\Theta_{\overline{CB}}(\Psi)$ an.

Einwurf der Lösungen bis zum 2.2.2009, 13:00 Uhr, in einen der Einwurfkästen im dritten Stock des Mathematik-Gebäudes 20.30 neben dem Seminarraum S32. Jede Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet. Die Übungsblätter stehen auch unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/la_mathe2008w/

zum Download bereit.