Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Dipl.-Math. Oliver Bauer

# Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

**Übungsblatt 13** **Wintersemester 2008/2009**

---

## Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $\sigma \in S_n$ eine Permutation der Zahlen $1, \ldots, n$. Zeigen sie:

$$\operatorname{sign}(\sigma) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

## Aufgabe 2 (4 Punkte)

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

(a) $A := \begin{pmatrix} -3 & -11 & -11 & 45 \\ 1 & 11 & 10 & -83 \\ 1 & -6 & -5 & 81 \\ 0 & -3 & -3 & 42 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4 \times 4}.$

(b) $B := \begin{pmatrix} 1 + a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1 + a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1 + a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ mit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}$.

(c) $C = (c_{ij}) \in \mathbb{Q}^{n \times n}$, gegeben durch $c_{ij} := \begin{cases} 0, & i = j \\ 1, & i \neq j \end{cases}$ mit $1 \le i, j \le n$.

## Aufgabe 3 (4 Punkte)

Die Matrix $A_n = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ sei gegeben durch

$$a_{ij} := \begin{cases} 1, & i = j \\ -1, & i = j - 1 \\ j^2, & i = j + 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für $1 \le i, j \le n$. Bestimmen Sie mit vollständiger Induktion die Determinante von $A_n$.

## Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n},$$

wobei $A \in \mathbb{K}^{p \times p}$, $B \in \mathbb{K}^{p \times q}$ und $C \in \mathbb{K}^{q \times q}$ mit $p + q = n$ gelte.

Zeigen Sie:

$$\det(M) = \det(A) \cdot \det(C).$$

---

Einwurf der Lösungen bis zum 9.2.2009, 13:00 Uhr, in einen der Einwurfkästen im dritten Stock des Mathematik-Gebäudes 20.30 neben dem Seminarraum S32. Jede Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet. Die Übungsblätter stehen auch unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/la_mathe2008w/

zum Download bereit.