Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Dipl.-Math. Oliver Bauer

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Weihnachtsübungsblatt **Wintersemester 2008/2009**

Die Aufgaben auf diesem Blatt sind ausgewählte Aufgaben aus den **Klausuren** der letzten Jahre. Sie sind mit dem bisher in der Vorlesung behandelten Stoff lösbar. Unter Klausurbedingungen haben Sie für diese Aufgaben durchschnittlich 20 Minuten Zeit zur Bearbeitung.

Aufgabe 1 (Herbst 2008)

Auf $\mathbb{Z}$ sei eine Verknüpfung $\circ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ erklärt durch $\alpha \circ \beta := \alpha + \beta + 5$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$.

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}, \circ)$ eine abelsche Gruppe ist.

(b) Weisen Sie nach, dass $(\mathbb{Z}, \circ)$ und $(\mathbb{Z}, +)$ isomorphe Gruppen sind.

(c) Lösen Sie die Gleichung $x \circ x = 21$ in $(\mathbb{Z}, \circ)$.

Aufgabe 2 (Herbst 2008)

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$.

(a) Seien $a_1, a_2, a_3 \in V$ und $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ mit $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0$.

Zeigen Sie:

$$[a_1, a_2] = [a_1, a_3].$$

(b) Seien $a_1, \dots, a_n \in V \setminus \{0\}$.

Beweisen Sie, dass $a_1, \dots, a_n$ genau dann linear unabhängig sind, wenn gilt

$$[a_1, \dots, a_i] \cap [a_{i+1}, \dots, a_n] = \{0\} \qquad \text{für } i = 1, \dots, n-1.$$

Hinweis: Mit $[a_1, \dots, a_k]$ wird die lineare Hülle von $a_1, \dots, a_k$ bezeichnet.

Aufgabe 3 (Herbst 2008)

Seien U_1, U_2 Untervektorräume des $\mathbb{R}^4$ mit

$$U_1 := \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right], \qquad U_2 := \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right].$$

Bestimmen Sie zu $U_1, U_2, U_1 \cap U_2, U_1 + U_2$ je eine Basis und die Dimension.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (Herbst 2007)

Es seien $(G, *)$ eine Gruppe mit neutralem Element e_G und $(H, \cdot)$ eine weitere Gruppe.

(a) Geben Sie die Definition eines Gruppenhomomorphismus $\Phi : G \longrightarrow H$ an und beweisen Sie, dass für solch einen Gruppenhomomorphismus $\Phi(e_G)$ das neutrale Element von H ist.

(b) Nun besitze G die Eigenschaft, dass für alle $g \in G$ eine ungerade natürliche Zahl n existiert mit $g^n = e_G$.

Zeigen Sie, dass es keinen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\Phi : G \longrightarrow \{1, -1\}$ gibt.

Aufgabe 5 (Frühjahr 2008)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist
$$U := \{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid AX = XB\}$$
ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(b) Sind speziell
$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix},$$
so gilt für den Untervektorraum U aus Teil (a)
$$U = \{0\} \iff \{a_1, a_4\} \cap \{b_1, b_4\} = \emptyset.$$

Aufgabe 6 (Frühjahr 1999)

Es seien V ein Vektorraum und U_1, U_2, U_3 Untervektorräume von V.

Zeigen Sie:

(a) $U_1 \subset U_3 \quad \Leftrightarrow \quad (U_1 + U_2) \cap U_3 = U_1 + (U_2 \cap U_3)$.

(b) $V = U_1 \cup U_2 \quad \Leftrightarrow \quad [V = U_1 \text{ oder } V = U_2]$.

FROHE WEIHNACHTEN UND EIN ERFOLGREICHES NEUES JAHR 2009 !

Diese Aufgaben werden nicht bewertet.

Zur Selbstkontrolle können die Aufgaben aber bis zum 12.01.2009, 13:00 Uhr, an bekannter Stelle abgegeben werden. Die Übungsblätter stehen auch unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/la_mathe2008w/

zum Download bereit.