

Mathematik II für die Fachrichtungen Biologie und Chemie

Übungsblatt 4

Sommersemester 07

Aufgabe 1. Orthogonalisierung

Wie auf Blatt 3, Aufgabe 2, sei V der reelle Vektorraum der Polynome in einer Variablen X vom Grad ≤ 2 mit reellen Koeffizienten. Zeigen Sie:

a) Die Menge $B := \{1, X, X^2\}$ ist eine Basis von V .

b) Seien weiter $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ und $f, g \in V$. Dann ist, wie in Blatt 3, Aufgabe 2, gezeigt, durch die Vorschrift

$$\langle f, g \rangle := \sum_{k=1}^3 f(x_k) \cdot g(x_k)$$

ein Skalarprodukt auf V gegeben. Berechnen Sie mit Hilfe des Orthogonalisierungsverfahrens von E. Schmidt, ausgehend von der Basis B aus a) eine Orthonormalbasis von V bezüglich dieses Skalarprodukts.

Aufgabe 2. Untervektorraum oder nicht?

(a) Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume des \mathbb{R}^3 (Nachweis)?

$$\begin{aligned} M_1 &:= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - 5 \cdot x_2 = x_3\} \\ M_2 &:= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2^3 = 3 \cdot x_3\} \end{aligned}$$

(b) Ist die folgende Menge ein Untervektorraum des \mathbb{C}^4 (Nachweis)?

$$M_3 = \{\vec{z} \in \mathbb{C}^4 \mid z_1 \bar{z}_1 \geq z_3 \bar{z}_3\}$$

(c) Welche der folgenden Mengen ist ein Untervektorraum des Vektorraums F aller reellen Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (Nachweis)?

$$\begin{aligned} M_4 &= \{f \in F \mid f(x) = 2f(-2x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\} \\ M_5 &= \{f \in F \mid f(x) = a e^x + b e^{-x} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad a, b \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Aufgabe 3. Basis eines Untervektorraums

Im \mathbb{R}^5 seien die folgenden Vektoren gegeben:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \\ 3 \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

a) Bestimmen Sie eine Basis des von den vier Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ aufgespannten Untervektorraums V von \mathbb{R}^5 .

b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ liegt der Vektor \vec{u} in V ? Schreiben Sie in diesem Fall \vec{u} als Linearkombination der in a) gefundenen Basisvektoren von V .

Abgabe der Lösungen bis zum Mittwoch, den 16.05.2007 um 08:00 Uhr in den entsprechenden Briefkasten neben dem Seminarraum 32 im Mathematikgebäude. Die Abgabe darf auch in Zweiergruppen aus *demselden Tutorium* erfolgen. Bitte vermerken Sie auf Ihrer Abgabe jeweils *Name, Matrikelnummer* sowie die *Nummer Ihres Tutoriums*. Jede Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet. Die Übungsblätter stehen auch unter <http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/m2biochem2007s/> zum Download bereit.