

Mathematik II für die Fachrichtungen Biologie und Chemie

Übungsblatt 9

Sommersemester 07

Aufgabe 1. Symmetrische Matrizen und Diagonalisierbarkeit

Im Rahmen der Physikalische Chemie werden Sie die Hückel-Theorie kennenlernen, mit deren Hilfe man Molekülorbitale und die zugehörigen Energien von π -Elektronensystemen quantenmechanisch berechnen kann. Die Energien sind dabei die Eigenwerte von bestimmten quadratischen Matrizen, die zugehörigen Eigenvektoren geben eine Beschreibung der Molekülorbitalstruktur. Eine solche Matrix, die im Rahmen der Hückel-Theorie für das Cyclopropenyl-Radikal auftritt, ist die Matrix

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie das charakteristische Polynom $p_M(\lambda)$, sowie die Eigenwerte und Eigenräume von M . Die Eigenwertgleichung $p_M(\lambda) = 0$ heißt in diesem Zusammenhang die **Säkulargleichung** von M .
- Geben Sie eine orthogonale Matrix U an, sodass $U^T M U$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 2. Hauptachsentransformation

Im \mathbb{R}^2 sei eine Kurve Q gegeben durch die Gleichung

$$37x_1^2 + 18x_1x_2 + 13x_2^2 + 42x_1 + 34x_2 - 95 = 0.$$

Bestimmen Sie die Normalform und skizzieren Sie Q .

Aufgabe 3. Logistische Gleichung

Das folgende Anfangswertproblem ist ein stark vereinfachtes Modell für das Wachstum einer Population mit spezifischer Wachstumsrate $k > 0$ in einem Biotop mit Kapazität $a > 0$. Die Individuenzahl zum Zeitpunkt t ist $x(t)$.

$$\begin{aligned} x'(t) &= kx(t)(a - x(t)), & t \geq 0 \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

Lösen Sie das Anfangswertproblem in den Fällen $x_0 = 0$, $0 < x_0 < a$ und $x_0 = a$. Skizzieren Sie die Lösungen in einem (t, x) -Koordinatensystem. Zu welchem Zeitpunkt ist der momentane Zuwachs $x'(t)$ am größten?

Abgabe der Lösungen bis zum Mittwoch, den 20.06.2007 um 08:00 Uhr in den entsprechenden Briefkasten neben dem Seminarraum 32 im Mathematikgebäude. Die Abgabe darf auch in Zweiergruppen aus *demselben Tutorium* erfolgen. Bitte vermerken Sie auf Ihrer Abgabe jeweils *Name*, *Matrikelnummer* sowie die *Nummer Ihres Tutoriums*. Jede Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet. Die Übungsblätter stehen auch unter <http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/m2biochem2007s/> zum Download bereit.