Aufgabe 1. Ebene

a) Die Ebene $E \subset \mathbb{R}^3$, die die drei Punkte $A\,(2,-1,3)$, $B\,(-1,1,2)$ und $C\,(2,-2,-1)$ enthält, soll durch eine Gleichung der Form

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 1$$

beschrieben werden. Bestimmen Sie die Koeffizienten a_1, a_2 und a_3.

b) Berechnen Sie den Schnittpunkt dieser Ebene mit der Geraden

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 2. Orthonormalisierung

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des Untervektorraums

$$U := [\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]$$

und ergänzen Sie diese zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 3. Inverse Matrix

Berechnen Sie die inverse Matrix von

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und lösen Sie damit die Matrixgleichung

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4. Determinante

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\det A,\ \det(A^2)$ und $\det(\frac{1}{2}A)$.

Aufgabe 5. Separation der Variablen

Bestimmen Sie die Lösung $x(t)$ der folgenden Anfangswertprobleme:

a) $x' + t = 0,\ x(2) = 0,$

b) $x' \cdot t + 2 \cdot x = 0,\ x(2) = 1.$

Aufgabe 6. Homogenes lineares System

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von Lösungen des folgenden homogenen linearen Systems von Differentialgleichungen:

$$\begin{array}{rcrcr} x_1'(t) & = & 3\,x_1(t) & + & 8\,x_2(t) \\ x_2'(t) & = & x_1(t) & + & x_2(t) \end{array}$$

Aufgabe 7. Potentialfeld

Es sei das folgende Vektorfeld $\vec{V} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben:

$$\vec{V}(x, y) := (3x^2 + 2x\cos y, -x^2 \sin y + e^y).$$

Zeigen Sie, dass $\vec{V}$ ein Gradientenfeld ist und bestimmen Sie ein Potential f dafür.