Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Gabriele Link
Dipl.-Math. Rafaela Rollin

Mathematik I (Wintersemester 2014/15)

Übungsblatt 2

Aufgabe 1 Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

a) $\frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3}$ ist eine natürliche Zahl.

b) $2^n < n!$, falls $n \geq 4$.

c) $\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Aufgabe 2 Es sei $z \in \mathbb{C}$.

a) Zeigen Sie:

(i) $\frac{1}{2}(z + \overline{z}) = \mathrm{Re}(z)$.

(ii) $\frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \overline{z}) = \mathrm{Im}(z)$.

Hinweis: Ein Skizze in der Gaußschen Zahlenebene kann hilfreich sein.

b) Zeigen Sie die folgende nützliche Formel (für $z \neq 0$):

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Dabei dürfen Sie die aus der Vorlesung bekannte Formel $|z|^2 = z\overline{z}$ nur verwenden, wenn Sie diese zunächst beweisen.

Aufgabe 3 Gegeben seien die komplexen Zahlen

$$z_1 = -2 + 4\mathrm{i}, \qquad z_2 = 1 - \mathrm{i}, \qquad z_3 = \sqrt{3} - 2\mathrm{i}, \qquad z_4 = \frac{2 + \mathrm{i}}{-4 + 2\mathrm{i}}, \qquad z_5 = \frac{\mathrm{i}^3}{2 - \mathrm{i}}.$$

a) Berechnen Sie

$$\left| \frac{z_1 + z_2 + 1}{z_1 - z_2 + \mathrm{i}} \right|.$$

b) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + b\mathrm{i}$ (mit $a, b \in \mathbb{R}$) dar:

(i) $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{z_3}{\overline{z_3}} + \frac{\overline{z_3}}{z_3}\right)$

(ii) $z_4 \cdot \overline{z_5}$.

Abgabe der Lösungen bis Montag, den 10.11.2014, 12 Uhr in den Briefkasten Ihres Tutoriums zwischen den Seminarräumen 1C-03 und 1C-04 im Allianzgebäude (Gebäude 5.20). Bitte **heften** Sie Ihre Abgabe zusammen und versehen Sie sie mit Ihrem **Namen**, Ihrer **Matrikelnummer** und der **Gruppennummer** Ihres Tutoriums.