

Mathematik I (Wintersemester 2014/15) Übungsblatt 6

Aufgabe 1 Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden konvergenten Folgen, welche durch die Angabe der Folgenglieder definiert sind:

$$a_n = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n j, \quad b_n = \frac{n!}{n^n}, \quad c_n = \left(\frac{\cos(n)}{2n} \right)^2, \quad d_n = \sqrt[2n]{n}.$$

Aufgabe 2 Die *Fibonacci-Folge* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist rekursiv definiert durch

$$f_1 = f_2 = 1, \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Wir definieren eine weitere Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch

$$a_n = \frac{f_{n+1}}{f_n},$$

und nehmen ohne Beweis zur Kenntnis, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\Phi = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ konvergiert.

a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n > 1$ gilt:

$$f_{n+1} > f_n \geq 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} > 1.$$

Somit ist auch $\Phi \geq 1$.

b) Zeigen Sie:

$$\Phi = 1 + \Phi^{-1}.$$

c) Folgern Sie aus Aufgabenteil (b), dass

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

gilt und bestimmen Sie den Wert von Φ .

(Bemerkung: Die Zahl Φ ist als *goldener Schnitt* bekannt.)

Aufgabe 3 Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren und berechnen Sie sie gegebenenfalls.

a) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ für $f: \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x+2}{x^2+x-2}$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ für $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

c) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ für $f: \mathbb{R} \setminus \{-3, -\frac{5}{3}, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x-1} \left(\frac{1}{x+3} - \frac{2}{3x+5} \right)$.

d) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ für $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x} \cdot \sin\left(\frac{x^2}{2}\right)$.

Abgabe der Lösungen bis Montag, den 8.12.2014, 12 Uhr in den Briefkasten Ihres Tutoriums zwischen den Seminarräumen 1C-03 und 1C-04 im Allianzgebäude (Gebäude 5.20). Bitte **heften** Sie Ihre Abgabe zusammen und versehen Sie sie mit Ihrem **Namen**, Ihrer **Matrikelnummer** und der **Gruppennummer** Ihres Tutoriums.