Aufgabe 1

Gegeben seien die Punkte

$$A(1,2,3), \quad B(0,2,3), \quad C(0,0,3).$$

(a) Geben Sie die Hesse-Normalform der Ebene E, welche die drei Punkte A, B und C enthält, an.

(b) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $P(1,0,5)$ zur Ebene E.

(c) Berechnen Sie die Orthogonalprojektion der Punktes $P(1,0,5)$ auf die Ebene E.

Lösung:

(a) Zunächst benötigen wir zwei Richtungsvektoren der Ebene E; diese sind zum Beispiel gegeben durch die Vektoren

$$\vec{b} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ein Normalenvektor $\vec{u}$ der Ebene E ist gegeben durch

$$\vec{u} = \vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

daraus erhält man als Normaleneinheitsvektor

$$\vec{n} = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\langle \vec{a}, \vec{n} \rangle = 3$ erhalten wir als Hesse-Normalform der Ebene

$$x_3 = \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{n} \rangle = 3.$$

(b) Der Abstand $d(P,E)$ eines Punktes P mit Ortsvektor $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ von einer Ebene E mit Stützvektor $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ und Normaleneinheitsvektor $\vec{n}$ ist gegeben als Länge der Projektion des Verbindungsvektors $\overrightarrow{AP} = \vec{p} - \vec{a}$ auf die durch $\vec{n}$ gegebene Richtung, d.h.

$$d(P,E) = |\langle \vec{p} - \vec{a}, \vec{n} \rangle| = \left| \left\langle \begin{pmatrix} 1-1 \\ 0-2 \\ 5-3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \right| = 2.$$

(c) Den Ortsvektor $\overrightarrow{O\Pi_E(P)}$ der Orthogonalprojektion $\Pi_E(P)$ eines Punktes P mit Ortsvektor $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ auf eine Ebene E mit Stützvektor $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ und Normaleneinheitsvektor $\vec{n}$ erhält man, indem man von $\vec{p}$ die Länge der Projektion des Verbindungsvektors $\overrightarrow{AP} = \vec{p} - \vec{a}$ auf die durch $\vec{n}$ gegebene Richtung abzieht, d.h.

$$\overrightarrow{O\Pi_E(P)} = \vec{p} + \langle \vec{a} - \vec{p}, \vec{n} \rangle \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 1-1 \\ 2-0 \\ 3-5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}_{=-2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Somit ist die Orthogonalprojektion von P auf E gegeben durch $(1,0,3)$.

Aufgabe 2

Es seien die folgenden Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^3$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ linear unabhängig sind.

(b) Bestimmen Sie aus den Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ mit Hilfe des Schmidtschen Orthonormierungsverfahrens eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$.

Lösung:

(a) Um nachzuweisen, dass die drei gegebenen Vektoren linear unabhängig sind, muss man zeigen, dass aus

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3 = \vec{o}$$

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ folgt. Dies ist äquivalent dazu, dass das folgende homogene lineare Gleichungssystem für die Unbekannten α_1, α_2, α_3 nur die triviale Lösung $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ besitzt:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dabei wurde im ersten Schritt die letzte Zeile von der zweiten abgezogen und dann nach oben als erste Zeile geschrieben; im zweiten Schritt wurde das zweifache der zweiten Zeile zur letzten Zeile addiert. Da das homogene lineare Gleichungssystem nun in Zeilenstufenform geschrieben ist und keine Null auf der Diagonalen steht, ist es nur trivial lösbar, was zu zeigen war.

(b) Wir beginnen mit der Normierung des ersten Vektors, d.h.

$$\vec{b}_1 = \frac{1}{\|\vec{v}_1\|}\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Im nächsten Schritt bestimmen wir einen Vektor $\vec{c}_2$ in der linearen Hülle $[\vec{b}_1, \vec{v}_2]$, der orthogonal zu $\vec{b}_1$ ist:

$$\vec{c}_2 = \vec{v}_2 - \langle \vec{v}_2, \vec{b}_1 \rangle \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}_{=\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix};$$

nach Normierung folgt

$$\vec{b}_2 = \frac{1}{\|\vec{c}_2\|}\vec{c}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Zuletzt benötigen wir noch einen Vektor $\vec{c}_3 \in [\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{v}_3](= \mathbb{R}^3)$, der im orthogonalen Komplement von $[\vec{b}_1, \vec{b}_2]$ liegt. Diesen bestimmt man mittels der Formel

$$\vec{c}_3 = \vec{v}_3 - \langle \vec{v}_3, \vec{b}_1 \rangle \vec{b}_1 - \langle \vec{v}_3, \vec{b}_2 \rangle \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}_{=0} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$- \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}_{=-4/\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{4}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix};$$

nach Normierung erhält man

$$\vec{b}_3 = \frac{1}{\|\vec{c}_3\|} \vec{c}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die gewünschte Orthonormalbasis ist damit gegeben durch $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$.

Aufgabe 3

Es sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A.

(b) Bestimmen Sie den Eigenraum von A zum Eigenwert -2.

(c) Ist A diagonalisierbar?

(d) Ist A invertierbar?

Lösung:

(a) Um die Eigenwerte zu berechnen, stellen wir zunächst das charakteristische Polynom auf:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_3) &= \begin{vmatrix} -\lambda & -3 & -1 \\ -2 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & -3 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda \\ 2 & 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \\ 2 & \lambda & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(4-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(-\lambda^2 + 4) \\ &= -(\lambda - 4)(\lambda^2 - 4) = -(\lambda - 4)(\lambda - 2)(\lambda + 2). \end{aligned}$$

Dabei haben wir im ersten Schritt die letzte Zeile zur zweiten addiert, im zweiten Schritt die letzte Spalte von der zweiten abgezogen; zuletzt wurde nach der letzten Spalte entwickelt. Die Eigenwerte sind somit gegeben durch $4, 2, -2$.

(b) Zur Bestimmung des Eigenraumes $\mathcal{E}_{-2} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, (A - (-2)E_3)\,\vec{x} = \vec{o}\}$ zum Eigenwert -2 müssen wir das folgende homogene lineare Gleichungssystem lösen:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei wurde im ersten Schritt die erste Zeile zur zweiten addiert und von der dritten subtrahiert, im zweiten Schritt die letzte Zeile durch 6 dividiert, mit der zweiten vertauscht und dreimal zur ersten addiert. Als Lösung erhält man somit

$$\mathcal{E}_{-2} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right].$$

(c) A ist diagonalisierbar, da A drei verschiedene Eigenwerte besitzt: Zu jedem Eigenwert ist der Eigenraum per definitionem mindestens 1-dimensional, und somit existiert eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A.

(d) A ist invertierbar, denn $\det(A) = p_A(0) = 4 \cdot (-2) \cdot 2 = -16 \neq 0$.

Aufgabe 4

Es sei das folgende homogene System linearer Differentialgleichungen gegeben:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= 3\,y_1(t) + 4\,y_2(t) \\ y_2'(t) &= -y_1(t) - 2\,y_2(t) \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem und die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems.

(b) Berechnen Sie die Lösung für das durch $\vec{y}(0) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ gegebene Anfangswertproblem.

Lösung:

(a) Wir schreiben das homogene lineare Differentialgleichungssystem zunächst in der Matrixform

$$\vec{y}\,' = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}_{=A} \cdot \vec{y}.$$

Um ein Fundamentalsystem zu bestimmen, benötigen wir zunächst die Eigenwerte von A; dazu berechnet man das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_2) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-2-\lambda) + 4 \\ &= -6 - \lambda + \lambda^2 + 4 = \lambda^2 - \lambda - 2. \end{aligned}$$

Nullstellen davon erhält man mit Hilfe der Mitternachtsformel:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}, \quad \text{d.h.} \quad \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -1.$$

Weiter benötigt man zu jedem der beiden Eigenwerte einen Eigenvektor; zunächst betrachten wir $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{E}_2 = \left[\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right].$$

Für $\lambda_2 = -1$ erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{E}_{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right].$$

Ein Fundamentalsystem des gegebenen Systems bilden daher die zwei Funktionen

$$\vec{u}_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix};$$

die allgemeine Lösung lautet

$$\vec{y}(t) = c_1 \vec{u}_1(t) + c_2 \vec{u}_2(t) = c_1 \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Um das Anfangswertproblem zu lösen, macht man den Ansatz

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{y}(0) = c_1 \mathrm{e}^{2\cdot 0} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \mathrm{e}^{-0} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix};$$

man hat also folgendes inhomogenes lineares Gleichungssystem für die Unbekannten c_1, c_2 zu lösen:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{array}\right)$$

Die Lösung des Anfangswertproblems lautet daher

$$\vec{y}(t) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{4}{3}\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5

Gegeben sei die folgende lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$y''(t) - 3\,y'(t) = 9.$$

(a) Geben Sie die Störfunktion an.

(b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Gleichung.

(c) Geben Sie die allgemeine Lösung der ursprünglichen Gleichung an.

Lösung:

(a) Die Störfunktion lautet $b(t) = 9$.

(b) Um ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

$$y''(t) - 3y'(t) = 0$$

zu bestimmen, benötigt man die Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$0 = r^2 - 3r = r(r-3);$$

diese sind $r_1 = 0$, $r_2 = 3$. Ein Fundamentalsystem bilden daher die Funktionen

$$y_1(t) = \mathrm{e}^{r_1 t} = 1, \quad y_2(t) = \mathrm{e}^{r_2 t} = \mathrm{e}^{3t}.$$

(c) Eine spezielle Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung erhält man zum Beispiel mit Hilfe der Methode der unbestimmten Koeffizienten. Der Ansatz dafür lautet

$$y_\mathrm{p}(t) = t \cdot c_0,$$

da $b(t)$ ein Polynom vom Grad 0 ist, und $r = 0$ eine einfache Lösung der charakteristischen Gleichung ist. Einsetzen von $y_\mathrm{p}'(t) = c_0$, $y_\mathrm{p}''(t) = 0$ in die Differentialgleichung liefert die Gleichung

$$0 - 3c_0 = 9, \quad \text{also} \quad c_0 = -3.$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist daher gegeben durch

$$y_\mathrm{p}(t) = -3t.$$

Die allgemeine Lösung der ursprünglichen Gleichung lautet somit

$$y(t) = c_1\,y_1(t) + c_2\,y_2(t) + y_\mathrm{p}(t) = c_1 + c_2\mathrm{e}^{3t} - 3t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 6

Untersuchen Sie, ob das Vektorfeld

$$\vec{V} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \vec{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2\,xy + yz \\ x^2 + xz + 6\,y^2 z \\ xy + 2\,y^3 \end{pmatrix}$$

ein Potentialfeld ist und geben Sie gegebenenfalls ein Potential an.

Lösung: Wir überprüfen zunächst die Integrabilitätsbedingungen. Dazu benötigen wir die partiellen Ableitungen der Komponentenfunktionen V_1, V_2, V_3

$$\begin{aligned}
\partial_y V_1 &= \partial_y(2xy + yz) = 2x + z, \\
\partial_z V_1 &= \partial_z(2xy + yz) = y, \\
\partial_x V_2 &= \partial_x(x^2 + xz + 6y^2 z) = 2x + z, \\
\partial_z V_2 &= \partial_z(x^2 + xz + 6y^2 z) = x + 6y^2, \\
\partial_x V_3 &= \partial_x(xy + 2y^3) = y, \\
\partial_y V_3 &= \partial_z(xy + 2y^3) = x + 6y^2.
\end{aligned}$$

Wegen $\partial_x V_2 = \partial_y V_1$, $\partial_y V_3 = \partial_z V_2$ und $\partial_z V_1 = \partial_x V_3$ sind die Integrabilitätsbedingungen erfüllt; da $\mathbb{R}^3$ sternförmig ist, handelt es sich bei $\vec{V}$ um ein Potentialfeld.

Um ein Potential $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zu bestimmen, verwendet man wegen der zu erfüllenden Identität $\operatorname{grad} f = \vec{V}$ die drei Gleichungen

$$\partial_x f = V_1, \quad \partial_y f = V_2, \quad \partial_z f = V_3.$$

Für f muss also insbesondere

$$2xy + yz = V_1 = \partial_x f$$

gelten; dies ist erfüllt für jede Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ der Form

$$f(x,y,z) = x^2 y + xyz + g(y,z)$$

mit einer Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweier Variabler. Betrachtet man nun die zweite Gleichung $\partial_y f = V_2$, so muss weiter gelten

$$x^2 + xz + 6y^2 z = V_2 = \partial_y f = x^2 + xz + \partial_y g;$$

Vergleich der beiden Seiten liefert die Bedingung:

$$\partial_y g = 6y^2 z,$$

d.h. $g(y,z) = 2y^3 z + h(z)$ mit einer Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diese erhält man aus der dritten Gleichung $\partial_z f = V_3$, d.h.

$$xy + 2y^3 = V_3 = \partial_z f = \partial_z(x^2 y + xyz + 2y^3 z + h(z)) = xy + 2y^3 + h'(z).$$

Es muss also $h'(z) = 0$ und damit $h(z) = C$ gelten mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Jedes Potential von $\vec{V}$ ist somit von der Form

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x,y,z) \mapsto x^2 y + xyz + 2y^3 z + C$$

mit $C \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 7

Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

auf der Ellipse $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - xy + y^2 = 3\}$, also unter der Nebenbedingung

$$x^2 - xy + y^2 - 3 = 0.$$

Lösung: Zum Auffinden der möglichen Kandidaten für lokale Extremstellen unter der Nebenbedingung $h(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 3 = 0$ wenden wir die Methode der Lagrange-Multiplikatoren an. Dies ist erlaubt, da für die Funktion

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad h(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 3$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \operatorname{grad} h(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - y \\ -x + 2y \end{pmatrix}$$

nur im Punkt $(0, 0)$ gilt, für den $h(0, 0) = -3 \neq 0$ ist.

In den kritischen Stellen muss also $\lambda \in \mathbb{R}$ existieren, sodass die Gleichung

$$\operatorname{grad} f(x, y) - \lambda \operatorname{grad} h(x, y) = \vec{o} \qquad (*)$$

erfüllt ist; wegen

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

entspricht dies genau den zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= 2x - \lambda(2x - y) = 2(1 - \lambda)x + \lambda y, \\ 0 &= 2y - \lambda(-x + 2y) = \lambda x + 2(1 - \lambda)y. \end{aligned}$$

Subtrahiert man das y-fache der ersten Zeile vom x-fachen der zweiten, so ergibt sich die Gleichung

$$0 = \lambda x^2 - \lambda y^2 = \lambda(x^2 - y^2),$$

die als Lösungen $\lambda = 0$ oder $x^2 = y^2$ besitzt. Im ersten Fall würde aus $(*)$ $x = y = 0$ folgen, was wiederum $h(x, y) \neq 0$ zur Folge hätte; im zweiten Fall muss $y = x$ oder $y = -x$ gelten. Eingesetzt in die Nebenbedingung erhält man im Fall $y = x$

$$0 = x^2 - x \cdot x + x^2 - 3 = x^2 - 3, \quad \text{also} \quad x = \pm\sqrt{3},$$

im Fall $y = -x$

$$0 = x^2 - x \cdot (-x) + (-x)^2 - 3 = 3x^2 - 3, \quad \text{also} \quad x = \pm 1.$$

Die einzig möglichen Stellen für lokale Extrema von f auf der gegebenen Ellipse sind daher die Punkte $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$. Weiter gilt

$$f(\sqrt{3}, \sqrt{3}) = f(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = 3 + 3 = 6, \quad f(1, -1) = f(-1, 1) = 1 + 1 = 2.$$

Da die Menge $\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - xy + y^2 = 3\}$ beschränkt ist, nimmt nach Bemerkung 4.35 des Skripts die Funktion f auf $\mathcal{E}$ ihr Maximum und Minimum an. Bei $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ handelt es sich daher um lokale Maximalstellen, bei $(1, -1)$, $(-1, 1)$ um lokale Minimalstellen.