Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Gabriele Link
Dipl.-Math. Rafaela Rollin

Mathematik II (Sommersemester 2015)
Übungsblatt 3

Aufgabe 1 Es seien $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie:

a) Die Formel für das mehrfache Vektorprodukt aus der Vorlesung:
$$(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} = \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle \vec{y} - \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle \vec{x}.$$

b) Die *Jacobi-Identität*:
$$(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} \; + \; (\vec{z} \times \vec{x}) \times \vec{y} \; + \; (\vec{y} \times \vec{z}) \times \vec{x} \; = \; \vec{o}.$$

Aufgabe 2 Gegeben seien die Vektoren
$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^3.$$

a) Überprüfen Sie, ob die Vektoren $\vec{w}, \vec{x}$ und $\vec{y}$ linear abhängig sind.

b) Ist $\vec{z}$ in der linearen Hülle von $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ enthalten? Finden Sie gegebenenfalls $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, so dass gilt:
$$\lambda \vec{x} + \mu \vec{y} = \vec{z}.$$

c) Zeigen Sie, dass für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ gilt:
$$\langle \alpha \vec{x} \times \beta \vec{y}, \gamma \vec{z} \rangle = 0.$$

Aufgabe 3
Der Abstand eines Punktes P mit Ortsvektor $\vec{p}$ zu einer Geraden g ist definiert als $d(P, g) = \min_{\vec{x} \in g} d(\vec{p}, \vec{x})$.
Entsprechend ist der Abstand zweier Geraden h und g definiert als $d(h, g) = \min_{\vec{x} \in h, \vec{y} \in g} d(\vec{x}, \vec{y})$.
Die Orthogonalprojektion $\Pi_g(P)$ von P auf g ist definiert als derjenige Punkt auf g, für den die Verbindungsgerade von P nach $\Pi_g(P)$ orthogonal zum Richtungsvektor von g ist.

Gegeben sei nun eine Gerade g in Parameterform $g = \{\vec{a} + \alpha \vec{b} | \alpha \in \mathbb{R}\}$ mit $||\vec{b}|| = 1$, und ein Punkt P mit Ortsvektor $\vec{p}$.

a) Bestimmen Sie mit Hilfe von Bemerkung 1.26 den Ortsvektor der Orthogonalprojektion $\Pi_g(P)$.

b) Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Pythagoras, dass die Gleichung $d(P, g) = d(P, \Pi_g(P))$ gilt.

c) Geben Sie damit eine Formel für den Abstand $d(P, g)$ an.

d) Sei nun h eine zu g parallele Gerade durch einen Punkt Q mit Ortsvektor $\vec{q}$. Zeigen Sie, dass $d(Q, g) = d(R, g)$ für alle Punkte R auf der Geraden h gilt. Folgern Sie daraus, dass der Abstand von h und g gegeben ist durch $d(h, g) = d(Q, \Pi_g(Q))$.

Abgabe der Lösungen bis Dienstag, den 5.5.2015, 12 Uhr in den Briefkasten Ihres Tutoriums im Foyer des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30). Bitte **heften** Sie Ihre Abgabe zusammen und versehen Sie sie mit Ihrem **Namen**, Ihrer **Matrikelnummer** und der **Gruppennummer** Ihres Tutoriums.