

Mathematik II (Sommersemester 2015)

Übungsblatt 4

Aufgabe 1 Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die folgenden Produkte, sofern diese existieren:

$$AB, \quad CA, \quad (A + B^{-1})C, \quad AC^T, \quad (CC^T A^{-1})^T, \quad D \frac{1}{2} F.$$

Aufgabe 2 Aus der Vorlesung wissen Sie, dass die Multiplikation eines Vektors $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ mit einer Matrix der Form

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

die Drehung von \vec{x} um den Winkel α um den Ursprung beschreibt.

a) Zeigen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme:

$$D_\alpha \cdot D_\beta = D_{\alpha+\beta} = D_\beta \cdot D_\alpha.$$

b) Geben Sie zu D_α ein D_β an, so dass $D_\alpha \cdot D_\beta = I_2$.

c) Geben Sie zu D_α ein D_β an, so dass $D_\alpha^T = D_\beta$.

d) Zeigen Sie, dass für alle Winkel α und alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$\langle D_\alpha \cdot \vec{x}, D_\alpha \cdot \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle.$$

Aufgabe 3 Finden Sie Matrizen, die die folgenden geometrischen Transformationen im \mathbb{R}^3 beschreiben:

a) $S \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ soll die Spiegelung an der $x_2 x_3$ -Ebene darstellen, d.h. für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ soll gelten:

$$S \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

b) Für einen festen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ soll $A_{\vec{v}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ das Vektorprodukt von \vec{v} mit einem beliebigen Vektor \vec{x} darstellen, d.h. für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ soll gelten:

$$A_{\vec{v}} \cdot \vec{x} = \vec{v} \times \vec{x}.$$

Abgabe der Lösungen bis Dienstag, den 12.5.2015, 12 Uhr in den Briefkasten Ihres Tutoriums im Foyer des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30). Bitte **heften** Sie Ihre Abgabe zusammen und versehen Sie sie mit Ihrem **Namen**, Ihrer **Matrikelnummer** und der **Gruppennummer** Ihres Tutoriums.