Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Gabriele Link
Dipl.-Math. Rafaela Rollin

Mathematik II (Sommersemester 2015)

Übungsblatt 6

Aufgabe 1 Prüfen Sie, ob die folgenden Teilmengen Untervektorräume des jeweiligen Vektorraumes V sind, und geben Sie ggf. eine Basis und die Dimension des Untervektorraumes an:

a) $U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -x \\ x & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}, \qquad V = \mathbb{R}^{2\times 2}.$

b) $U_2 = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \,\middle|\, \beta \in \mathbb{R} \right\}, \qquad V = \mathbb{R}^3.$

c) $U_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1 = x_2 \text{ und } x_3 = x_1^2 \right\}, \qquad V = \mathbb{R}^3.$

d) $U_4 = \left\{ p : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto a + ax + ax^2 \,\middle|\, a \in \mathbb{R} \right\}, \qquad V = \mathcal{P}_2[x]$

Aufgabe 2 Ein Untervektorraum $U \subset \mathbb{R}^4$ sei durch die folgenden Gleichungen gegeben:

$$\begin{aligned} u_1 + 2u_2 - 2u_3 &= 0, \\ u_1 + u_2 - 3u_3 + u_4 &= 0. \end{aligned}$$

(Das bedeutet U enthält genau die Vektoren $\vec{u} \in \mathbb{R}^4$, deren Koordinaten diese beiden Gleichungen erfüllen.)

a) Geben Sie eine Basis für U an.

b) Stellen Sie den Vektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

als Linearkombination der in Teil (a) ermittelten Basisvektoren dar.

Gegeben sei außerdem der Untervektorraum

$$U' = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \subset \mathbb{R}^4$$

c) Bestimmen Sie eine Basis von $U + U'$.

d) Ist die Summe $U + U'$ direkt?

BITTE WENDEN!

Aufgabe 3 Prüfen Sie, ob die folgenden Abbildungen linear sind und geben Sie ggf. die Darstellungsmatrix bzgl. der jeweiligen Standardbasen an:

a) $\phi_1 \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{P}_2[x], \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \Big(p : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (x - x_1)(x - x_2)\Big),$

b) $\phi_2 \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ 2x_1 - x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix},$

c) $\phi_3 \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad x \longmapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 2x \\ x^2 \end{pmatrix},$

d) $\phi_4 \colon \mathcal{P}_4[x] \longrightarrow \mathcal{P}_3[x], \qquad p \longmapsto p',$ wobei p' die erste Ableitung von p bezeichnet.

Abgabe der Lösungen bis Dienstag, den 26.5.2015, 12 Uhr in den Briefkasten Ihres Tutoriums im Foyer des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30). Bitte **heften** Sie Ihre Abgabe zusammen und versehen Sie sie mit Ihrem **Namen**, Ihrer **Matrikelnummer** und der **Gruppennummer** Ihres Tutoriums.