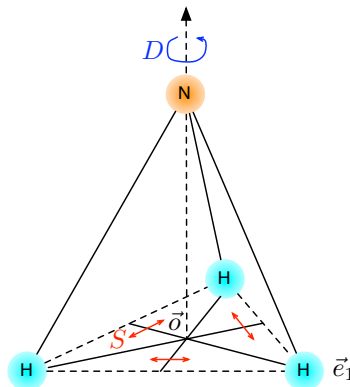


Mathematik II (Sommersemester 2015)

Übungsblatt 9

Aufgabe 1

Die folgende Abbildung stellt ein Ammoniakmolekül NH_3 dar. Die Symmetrien dieses Moleküls sind durch Pfeile angedeutet.



Wir wählen unsere Koordinaten im Raum derart, dass das N-Atom auf der x_3 -Achse liegt und eines der H-Atome auf dem Vektor \vec{e}_1 liegt. Die drei H-Atome bilden dann die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks in der x_1x_2 -Ebene.

Bestimmen Sie die Symmetriegruppe des Ammoniakmoleküls wie folgt:

- Bestimmen Sie die Koordinaten der übrigen H-Atome.
- Zeigen Sie, dass die beiden Isometrien

$$D = \begin{pmatrix} \cos(\frac{2}{3}\pi) & -\sin(\frac{2}{3}\pi) & 0 \\ \sin(\frac{2}{3}\pi) & \cos(\frac{2}{3}\pi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

das Molekül auf sich selbst abbilden.

- Geben Sie alle Matrizen an, die sich durch Produktbildung aus S und D ergeben.
Hinweis: Sie müssen sechs Matrizen erhalten (einschließlich S und D).
- Zeigen Sie, dass die Matrizen aus Teil (c) die Elemente S^{-1} und D^{-1} enthalten.

Bemerkung: Sie sollten sich durch Anschauung überzeugen, dass die in Teil (c) gefundenen Matrizen alle Symmetrien des Ammoniakmoleküls darstellen. Überlegen Sie, welche der im Bild angedeuteten Symmetrien durch welche Matrix repräsentiert werden.

BITTE WENDEN!

Aufgabe 2

Gegeben sei die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A und eine orthogonale Matrix U , so dass $U^T A U$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 3

a) Berechnen Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Differenzialgleichungen.

(i) $y'(t) + t(y(t))^2 = 0, \quad t \in \mathbb{R},$

(ii) $ty'(t) = \sqrt{1 - (y(t))^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$

b) Berechnen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems.

$$y'(t) = \frac{t}{3\sqrt{(1+t^2)}(y(t))^2}, \quad t > 0,$$

$$y(0) = 3.$$

Abgabe der Lösungen bis Dienstag, den 16.6.2015, 12 Uhr in den Briefkasten Ihres Tutoriums im Foyer des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30). Bitte **heften** Sie Ihre Abgabe zusammen und versehen Sie sie mit Ihrem **Namen**, Ihrer **Matrikelnummer** und der **Gruppennummer** Ihres Tutoriums.