

Mathematik II (Sommersemester 2015)

Übungsblatt 12

Aufgabe 1

Gegeben sei die folgende lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$y''(t) - 3y'(t) = 9.$$

- Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Gleichung.
- Bestimmen Sie mittels Variation der Konstanten eine partikuläre Lösung der ursprünglichen Gleichung.
- Geben Sie die allgemeine Lösung der ursprünglichen Gleichung an.

Aufgabe 2

Die Ausbreitung einer infektiösen Krankheit kann wie folgt modelliert werden: Es seien $g(t)$ die Anzahl der gesunden (aber ansteckbaren) und $k(t)$ die Anzahl der erkrankten Menschen zum Zeitpunkt t . Die Infektionsrate ist sowohl proportional zur Anzahl der kranken (also der ansteckenden) als auch zur Anzahl der gesunden (also der ansteckbaren) Menschen. Ein konstanter Anteil der Kranken stirbt oder erholt sich und ist danach nicht mehr ansteckbar. Dies führt auf die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}g'(t) &= -\alpha g(t)k(t) \\k'(t) &= \alpha g(t)k(t) - \beta k(t)\end{aligned}$$

mit Proportionalitätsfaktoren $\alpha, \beta > 0$. Die Anfangswerte seien $g(0) = g_0 > 0$ und $k(0) = k_0 > 0$. Zeigen Sie:

- Es gilt $k(t) = -g(t) + k_0 + g_0 + \rho \cdot \ln\left(\frac{g(t)}{g_0}\right)$ für ein $\rho > 0$.
- Die Funktion $g(t)$ ist monoton fallend.
- Solange $g(t) > \rho$ gilt, ist $k(t)$ monoton wachsend (die Krankheit breitet sich aus).
Sobald $g(t) < \rho$ gilt, ist $k(t)$ monoton fallend (die Krankheit stirbt aus).

Aufgabe 3

Gegeben sei die Funktion

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1^3 + x_2^2 + x_3 + \sin(x_1 x_2).$$

- Geben Sie die partiellen Funktionen $u(x_1)$, $v(x_2)$, $w(x_3)$ von f im Punkt $(0, 1, 1)$ an.
- Bestimmen Sie die Ableitungen u' , v' , w' der partiellen Funktionen im Punkt $(0, 1, 1)$.
- Berechnen Sie die Hesse-Matrix der Funktion f .

Abgabe der Lösungen bis Dienstag, den 7.7.2015, 12 Uhr in den Briefkasten Ihres Tutoriums im Foyer des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30). Bitte **heften** Sie Ihre Abgabe zusammen und versehen Sie sie mit Ihrem **Namen**, Ihrer **Matrikelnummer** und der **Gruppennummer** Ihres Tutoriums.