Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Gabriele Link
Dipl.-Math. Rafaela Rollin

Mathematik I (Wintersemester 2015/2016)

Übungsblatt 8

Aufgabe 1 Zeigen Sie, dass jede stetige Funktion $f\colon [a,b] \to [a,b]$ einen *Fixpunkt* hat, d. h. dass es ein $x_0 \in [a,b]$ gibt mit $f(x_0) = x_0$.

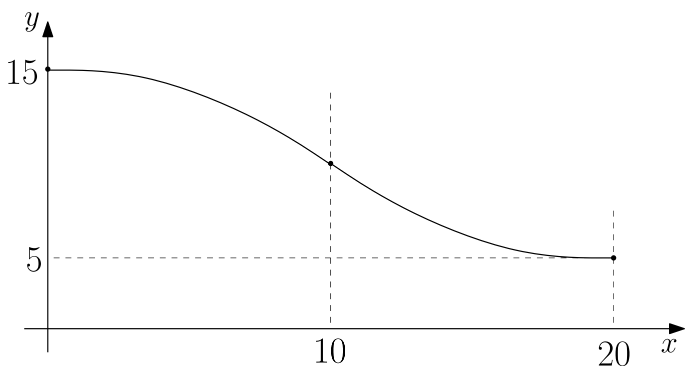
Hinweis: Betrachten Sie dazu die Hilfsfunktion $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x - f(x)$.

Aufgabe 2 In einen bestehenden Hang soll eine Rodelbahn eingebaut werden. Von $x = 0$ bis $x = 10$ [m] folgt die Bahn einer Parabel mit Scheitelpunkt bei $x = 0$, $y = 15$; von $x = 10$ bis $x = 20$ folgt sie einer Parabel mit Scheitelpunkt bei $x = 20$, $y = 5$ (siehe Skizze). Damit die Rodelbahn tatsächlich zum Rodeln geeignet ist, muss gelten:

(1) Der Anschluss der beiden Parabelstücke bei $x = 10$ ist stetig. (Das heißt, die Rodelbahn hat dort keine „Sprungstelle“.)

(2) Der Anschluss der beiden Parabelstücke bei $x = 10$ ist differenzierbar. (Das heißt, die Rodelbahn macht dort keinen „Knick“.)

Bestimmen Sie die beiden Parabeln.



Hinweis: Eine Parabel mit Scheitelpunkt (x_0, y_0) ist der Graph einer Funktion der Form

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0, \quad a \in \mathbb{R}\,.$$

Aufgabe 3 Berechnen Sie jeweils die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f : (0, \pi) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x^3 - 4x + e^{-x}}{2 \cdot \sin(x)}$,

b) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp\left(3x \cdot (\cos(x))^2 + x^4 - 3x\right)$,

c) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(x^2) \cdot \ln(|x|)$,

d) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^x$.

Abgabe der Lösungen bis Montag, den 21.12.2015, 12 Uhr in den Briefkasten Ihres Tutoriums im Foyer des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30). Bitte **heften** Sie Ihre Abgabe zusammen und versehen Sie sie mit Ihrem **Namen**, Ihrer **Matrikelnummer** und der **Gruppennummer** Ihres Tutoriums.