Nullstellenprobleme von reellen Polynomen

Vortrag von Christiane Sutter
Im Proseminar Lehramt am 27.11.2006
Kontakt: krischdjane@web.de

Einführung:
Im Referat soll es darum gehen, Lösungswege für das Lösen reeller Polynome bis zum Grad 4 zu beschreiben.
Kurze Erläuterung der Problematik der Nullstellenbestimmung bei Polynomen mit Grad $> 4 \Longrightarrow$ Idee von Galois
Außerdem sollen Hinweise gegeben werden, wie die Lage von Nullstellen abgeschätzt werden kann und wie sie in der Praxis näherungsweise bestimmt werden.

1 Grundbegriffe - Basics

1.1 Was sind reelle Polynome?

$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt **Polynom vom Grad** $n \in \mathbb{N}_0$ falls $\forall a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$:
$a_n \neq 0 \wedge \forall x \in \mathbb{C} : f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Dabei
- bestimmt der höchste Exponent n den **Polynomgrad** von p.
- bezeichnet man die Zahlen $a_0, ..., a_n$ als die **Koeffizienten** von p.
- nennen wir p **normiert**, falls der Leitkoeffizient $a_n = 1$ ist.

Polynome sind **"reell"**, wenn die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ sind.
Achtung! Polynome mit reellen Koeffizienten können auch komplexe Nullstellen haben.

1.2 Fundamentalsatz der Algebra

Hauptsatz der Algebra:
Sei p: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$: Ist $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ ein komplexes Polynom vom Grad n, so gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ (die Nullstellen des Polynoms), so dass
$p(x) = a_n(x - x_n)(x - x_{n-1}) \ldots (x - x_2)(x - x_1)$ gilt.

Die **Anzahl der Nullstellen**, wenn sie mit der richtigen Vielfachheit gezählt werden, ist also insgesamt gleich dem Grad des Polynoms.

1.3 Was ist eine Nullstelle?

Ein Element $x_0 \in \mathbb{C}$ eines Polynoms $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt **Nullstelle** von p, wenn $p(x_0) = 0$ gilt.

Nach dem Hauptsatz der Algebra sind die Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ die Nullstellen eines Polynoms. Von **einfacher Nullstelle** spricht man, wenn x_i nur einmal in den Linearfaktoren $(x - x_i)$ auftritt. Eine **mehrfache (k-fache) Nullstelle** in $x_i \in \mathbb{C}$ liegt vor, wenn der Linearfaktor $(x - x_i)$ k-mal auftritt.

Bei Polynomen mit reellen Koeffizienten treten echt komplexe Nullstellen stets als Paare komplex konjugierter Zahlen auf. Das heißt, ist $\lambda = x + iy$ eine Nullstelle, so auch $\bar{\lambda} = x - iy$.

1.4 Existenz von Nullstellen

Mit dem **Zwischenwertsatz** kann abgeschätzt werden, ob sich zwischen zwei Stellen a und b einer stetigen Funktion eine Nullstelle existiert:

Zwischenwertsatz von Bolzano:
Sei $f : \mathbb{R} \supset [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\gamma \in \mathbb{R}$ mit
$min\,\{f(x) : a \leq x \leq b\} \leq \gamma \leq max\,\{f(x) : a \leq x \leq b\}$.
Dann gibt es (mindestens) ein $\hat{x} \in [a, b]$ mit $f(\hat{x}) = \gamma$.

Haben f(a) und f(b) verschiedene Vorzeichen, so garantiert der Zwischenwertsatz die Existenz einer Nullstelle von f im offenen Intervall (a,b).

2 Lösungsformeln für Polynome bis zum Grad 4

Die Nullstellen von Polynomen ersten, zweiten, dritten und vierten Grades lassen sich mit Formeln explizit berechnen, dagegen lassen sich Polynome höheren Grades nur in Spezialfällen exakt faktorisieren.

2.1 Lineare Polynome

Lineare Polynome sind Polynome der Form $p(x) = ax + b$. Es soll $p(x) = 0$ sein. Daraus ergibt sich für x die Lösung:

$$\boxed{\mathbb{L} := \left\{ x \in \mathbb{R} | x = -\frac{b}{a} \right\}, a, b \in \mathbb{R}}$$

Geometrische Beschreibung linearer Polynome bei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Gerade, die die x-Achse in EINEM Punkt schneidet.

2.2 Quadratische Polynome

Zur Lösung einer **Quadratischen Gleichung** ($p(x) = ax^2 + bx + c = 0$) kann man folgende Lösungsformel (**"Mitternachtsformel"**) benutzen:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Für den Spezialfall eines normierten quadratischen Polynoms (d.h. $a = 1 \rightarrow p(x) = x^2 + px + q$) ergibt sich die sog. **"p-q-Formel"**:

$$\boxed{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}$$

Jede quadratische Gleichung kann durch geeignete Äquivalenzumformungen in die Normalform gebracht werden $\rightarrow p = \frac{b}{a}$, $q = \frac{c}{a}$

Der Ausdruck unter der Wurzel (die **Diskriminante** $D = b^2 - 4ac$) bestimmt für eine Gleichung mit reellen Koeffizienten, wie viele reellwertige Lösungen die Gleichung hat: A) $D > 0 \rightarrow 2$, B) $D = 0 \rightarrow 1$ (doppelte), C) $D < 0 \rightarrow$ keine (aber 2 komplexe)

Zur Herleitung der Lösungsformeln kann man die **Quadratische Ergänzung** benutzen.

Satz von Vieta: $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 x_2 = q$, falls $p(x) = x^2 + px + q = 0$

Diese Eigenschaft kann man nutzen, um die Lösung quadratischer Gleichungen geometrisch zu bestimmmen. Für den Fall $0 \leq q \leq \left(\frac{p}{2}\right)$ gilt nämlich mit Hilfe des Höhensatzes:

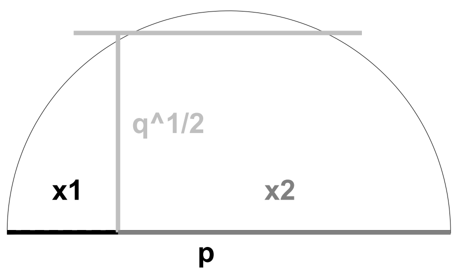

Abbildung 1: Lösungen nach Satz von Vieta

2.3 Kubische Polynome

Kubische Polynome sind Polynome dritten Grades.

Lösungsformeln zu kubischen Polynomen wurden erstmals 1545 von **Gerolamo Cardano (1501-1576)** in seinem Buch *Ars magna* veröffentlicht.

2.3.1 Lösung reduzierter kubischer Gleichungen

Die Lösung der kubischen Gleichung stützt sich auf die kubische Binomialformel

$$(u+v)^3 = 3uv(u+v) + (u^3+v^3),$$

die Cardano mit geometrischen Mitteln herleiten konnte.

Für die gesuchte Lösung $x = u + v$ der kubischen Gleichung $x^3 + px + q = 0$ erhält man die so genannten **Cardanosche Formel**

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

2.3.2 Lösung allgemeiner kubischer Gleichungen

Wie aber löst man nun den **allgemeinen Fall**? Wie löst man die Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$? Cardano löste das Problem, indem er ein allgemein anwendbares Verfahren benutzte, das die allgemeine Form in eine Gleichung des Typs $y^3+py+q = 0$ umformt.
Das quadratische und das kubische Glied können zusammengefasst werden, wenn man zur gesuchten Lösung x den Summanden $a/3$ addiert.
Hat man nun die reduzierte kubische Gleichung $y^3+py+q = 0$ mit der Cardandoschen Formel gelöst, kann die Lösung der urspünglichen Gleichung mittels der Transformation x = y - a/3 berechnet werden.
Im allgemeinen Fall ergibt sich also:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{\frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c}{2} + \sqrt{\left(\frac{\frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\frac{1}{3}a^2 + b}{3}\right)^3}}$$

$$+\sqrt[3]{-\frac{\frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c}{2} - \sqrt{\left(\frac{\frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\frac{1}{3}a^2 + b}{3}\right)^3}} - \frac{a}{3}$$

2.3.3 Art der Lösung kubischer Gleichungen

In Abhängigkeit vom Vorzeichen der Diskriminante $D = 4p^3 + 27q^2$ hat das kubische Polynom $x^3 + px + q$ für

- $D > 0$ eine reelle und zwei komplexe Nullstellen

- $D = 0$ eine zweifache und eine einfache reelle Nullstelle falls $4p^3 = -27p^2 \neq 0$ oder eine dreifache reelle Nullstelle falls $p = q = 0$.
- $D < 0$ drei reelle Nullstellen

Ein besonderer Fall ist $D < 0$: Bei der Bestimmung der drei reellen Lösungen mit der obigen Formel muss mit 'negativen Wurzeln' gerechnet werden. Deshalb wird dieser Fall casus irreducibilis genannt. Als Cardano diese Rechnung ausführte, war das sozusagen die Geburtsstunde der komplexen Zahlen.

2.4 mit Grad 4

Eine polynomiale Gleichung 4. Grades (auch **quartische Gleichung** genannt) hat die Form $Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$.

2.4.1 Biquadratische Gleichungen (im engeren Sinne)

Ist $B = 0$ und $D = 0$, dann lässt sich die Gleichung durch Substitution auf eine quadratische Gleichung zurückführen. Diese Spezialform wird manchmal in Lehrbüchern als **biquadratische Gleichung** bezeichnet.

2.4.2 Quartische Gleichungen (Reduzierte Form)

Außer für Gleichungen dritten Grades veröffentlichte Cardano in seiner *Ars magna* auch eine allgemeine Lösungsformel für Gleichungen vierten Grades. Er hat sich dabei des Wissens seines Schülers Ludovico Ferrari (1522-1569) bedient.
Quartische Gleichungen der Form $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ lassen sich so umformen, dass auf beiden Seiten ein Quadrat entsteht. Dies kann man in eine kubische Gleichung der Form

$$z^3 - \frac{p}{2}z^2 - rz + \frac{pr}{2} - \frac{q^2}{8} = 0$$

umwandeln, mit der durch die Cardanosche Formel bestimmbare Lösung z.
Wegen den Vorzeichenvarianten erhält man mithilfe der p-q-Formel vier Lösungen:

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}\sqrt{2z - p} \pm \sqrt{-\frac{1}{2}z - \frac{1}{4}p + \sqrt{z^2 - r}}$$

$$x_{3,4} = -\frac{1}{2}\sqrt{2z - p} \pm \sqrt{-\frac{1}{2}z - \frac{1}{4}p - \sqrt{z^2 - r}}$$

2.4.3 Quartische Gleichungen (Allgemeiner Fall)

Da Ferraris Verfahren nur für quartische Gleichungen verwendet werden kann, bei denen die Unbekannte x nicht in der dritten Potenz auftaucht, muss noch ein Weg beschrieben werden, mit der eine allgemeine Gleichung in eine Gleichung der reduzierten Form transformiert werden kann. Dies ist ganz ähnlich möglich wie im Fall der kubischen Gleichung: Man substituiert die Unbekannte x durch $x = y - \frac{a}{4}$, wobei sich die entstehenden Terme zur Potenz y^3 gegenseitig aufheben:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = y^4 + py^2 + qy + r$$

Dabei sind - wie schon bei der entsprechenden Substitution für kubische Gleichungen - die Koeffizienten der reduzierten Gleichung mittels polynomialer Ausdrücke berechenbar.

2.4.4 Art der Lösungen quartischer Gleichungen

Sind alle Koeffizienten reell, lassen sich drei Fallunterscheidungen für die möglichen Lösungen angeben, da sich jedes Polynom mit reellen Koeffizienten unabhängig von seinem Grad in lineare und quadratische Faktoren mit reellen Koeffizienten zerlegen lässt. (Fundamentalsatz der Algebra)

- Die Gleichung hat vier reelle Lösungen. Sie zerfällt in vier Linearfaktoren mit reellen Koeffizienten.
- Die Gleichung hat zwei reelle und zwei konjugiert komplexe Lösungen. Sie zerfällt in zwei Linearfaktoren und einen quadratischen Faktor mit reellen Koeffizienten.
- Die Gleichung hat zwei Paare konjugiert komplexer Lösungen. Sie zerfällt in zwei quadratische Faktoren mit reellen Koeffizienten.

3 Nullstellen von Polynomen mit beliebigem Grad n

3.1 Satz von Abel-Ruffini

Satz von Abel-Ruffini(1799/1824): Allgemeine Polynome fünften oder höheren Grades sind nicht durch Radikale, d.h. mathematische Ausdrücke, die nur Wurzeln und arithmetische Grundoperationen verwenden, auflösbar.

3.2 Idee von Galois

Eine Verallgemeinerung von Abels Ansätzen, die auch für spezielle Gleichungen anwendbar ist, fand wenige Jahre später der damals erst zwanzigjährige **Evariste Galois (1811-1832)**. Unter dramatischen Umständen, nämlich am Vorabend eines für ihn tödlich verlaufenden Duells, fasste er die von ihm in den Vormonaten gefundenen Ergebnisse in einem Brief zusammen. Darin enthalten sind Kriterien, die es erlauben, jede einzelne Gleichung darauf zu untersuchen, ob ihre Lösungen mit Hilfe von Wurzelausdrücken dargestellt werden können oder nicht.

Unter Verwendung der allgemeineren Resultate der Galoistheorie müssen zum Beweis des **Satzes von Abel-Ruffini** nur zwei Punkte gezeigt werden:

- Die *allgemeine Gleichung* fünften Grades (d.h. die Gleichung mit Variablen als Koeffizienten) besitzt als Galoisgruppe die symmetrische Gruppe S_5
- Die symmetrische Gruppe S_5 ist nicht auflösbar.

Eine Gruppe heißt **auflösbar**, wenn es eine absteigende Folge $G = G_0 \rhd G_1 \rhd \ldots \rhd G_n = 1$ von Normalteilern gibt, deren Quotienten G_k/G_{k+1} (Faktorgruppen) abelsch sind.
Als **Normalteiler**(oder normale Untergruppe) bezeichnet man in der Gruppentheorie eine Untergruppe N einer Gruppe G, wenn für alle $a \in G$ und $b \in N$ gilt: $aba^{-1} \in N$. Notation: $N \lhd G$. D.h. für jedes Element $a \in G$ ist die linke Nebenklasse von N gleich der rechten, also $aN = Na$.
Die **symmetrische Gruppe** S_n ist eine Gruppe, die aus allen Permutationen einer Menge mit n Elementen besteht. Gruppenoperation ist die Verkettung der Permutationen. Das neutrale Element ist die Identität id.

Der Hauptsatz der Galois-Theorie besagt:
Jede Gleichungsauflösung entspricht ineinander verschachtelten Zahlenbereichen (die durch die Koeffizienten und die Lösungen $x_1, x_2, \ldots$ gebildet werden) und diese lassen sich allesamt durch eine Analyse der Galois-Gruppe auffinden. Daher beantwortet bereits eine solche Analyse der Galois-Gruppe die Frage danach, ob Lösungen in Form verschachtelter Wurzelausdrücke dargestellt werden können.

4 Nullstellenbestimmung in der Praxis

In der numerischen Praxis besitzen heute die Formeln Cardanos kaum noch Bedeutung. In einem Zeitalter, in dem die Rechenleistung von Computern de facto unbegrenzt zur Verfügung steht, ist eine explizite Formel (und die "Wurzeltürme", wie sie etwa bei den quartischen Gleichungen auftauchen) bei praktischen Anwendungen nämlich entbehrlich, da es bei solchen völlig reicht, die Lösungen durch numerische Verfahren näherungsweise zu bestimmen.
Im Folgenden sollen die Wichtigsten dieser Verfahren kurz erläutert werden.

4.1 Bisektions-/Intervallhalbierungsverfahren

Gesucht ist die Nullstelle einer streng monoton steigenden Funktion f im Intervall $[a, b]$. Diese soll mit einer Genauigkeit ε angegeben werden. (Teilintervall von $[a, b]$, das die Nullstelle enthält hat höchstens die Länge ε.)
Idee: Abschätzung der Lage einer Nullstelle mit ZW-Satz. Anschließend Halbierung des Intervalls und Modifizierung der Intervallgrenzen (Funktionswerte der Intervallgrenzen müssen unterschiedliche VZ haben).

4.2 Newton-Verfahren

Idee: Tangente an den Graphen im Startwert x_0 anlegen; Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse ist neuer Startwert, der bei geeigneter Startwert-Wahl immernäher an der Nullstelle liegt.

Definition (Newton Verfahren)
Es sei f eine differenzierbare Funktion und x_0 ein beliebiger Startwert.
Man definiere eine Folge von Näherungen (x_n) durch
$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, falls $f'(x_n) \neq 0$.

4.3 Sekantenverfahren

Zwischen zwei Punkten der Funktion wird eine Sekante gelegt. Deren Schnittpunkt mit der x-Achse wird als verbesserter Startwert für die Iteration verwendet. Mit dem neuen Wert und einem der beiden letzten alten Werte (derjenige, dessen Funktionswert ein anderes Vorzeichen als der des neuen x-Wertes hat) wird dieser Schritt wiederholt.

4.4 Horner-Schema

Das Horner-Schema ist eine Rechenvorschrift zum Auswerten von Polynomen an einer Stelle x_0. Die Umformung des Polynoms nach dem Horner-Schema beschleunigt die Berechnung, indem überflüssige Berechnungen bei den Potenzen vermieden werden. Erfolgt die Auswertung durch Gleitkommaoperationen, so wird darüber hinaus auch der Rechenfehler geringer gehalten.

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \cdot \ldots \cdot a_1 x + a_0 = ((((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \ldots) + a_1)x + a_0$$