Der Goldene Schnitt

Vortrag von Christine Reiber

im Proseminar Lehramt am 4.12.06

1 Einführung

Sicherlich jeder hat schon einmal vom Goldenen Schnitt gehört. Es handelt sich dabei um eine bestimmte Art der Teilung einer Strecke. Der Vortrag soll den Hörer mit dem Goldenen Schnitt und seinem Vorkommen in der Mathematik und in anderen Bereichen vertraut machen.

2 Definition

„Eine Strecke sei im Verhältnis des Goldenen Schnittes geteilt, wenn sich die beiden Teilstücke zueinander verhalten wie das längere Teilstück zur ganzen Strecke.“

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{x+y}$$

- Setzt man $x + y = 1$, so erhält man folgende quadratische Gleichung: $x^2 + x - 1 = 0$ mit den beiden Lösungen

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0,618 = \rho \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1,618 = -\tau$$

- Setzt man $y = 1$, so erhält man folgende quadratische Gleichung: $x^2 - x - 1 = 0$ mit den beiden Lösungen

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618 = \tau \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0,618 = -\rho$$

ρ spiegelt das Verhältnis kleinere/größere Strecke wider und τ bestimmt das Verhältnis größere/kleinere Strecke. Beide Größen spielen eine wichtige Rolle beim Goldenen Schnitt.

Eine besondere Eigenschaft des Goldenen Schnittes ist die *Stetige Teilung*.

3 Historisches

- Um 450 v. Chr.: Hippasos von Metapont (Mitglied des Pythagoreer-Bundes):

  Untersuchungen am regelmäßigen Fünfeck: Verhältnis Kantenlänge zu Diagonale nicht als Quotient von ganzen Zahlen darstellbar

- Erste genaue Beschreibung des Goldenen Schnittes durch Euklid (ca. 340 v. Chr.):

  „proportio habens medium et duo extrema“: *Teilung im inneren und äußeren Verhältnis*

- Ca. 1509: Luca Pacioli di Borgo San Sepolcro:

  „De Divina Proportione“: *Göttliche Teilung/Göttliche Proportion*

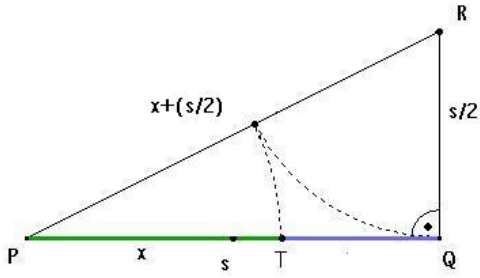
- Martin Ohm führt 1835 den Begriff „Goldener Schnitt“ ein

4 Konstruktion

$$\frac{s-x}{x} = \frac{x}{s} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + sx = s^2$$

Konstruktion mit Hilfe des Satzes des Pythagoras:

$$\left(x + \frac{s}{2}\right) = s^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2$$

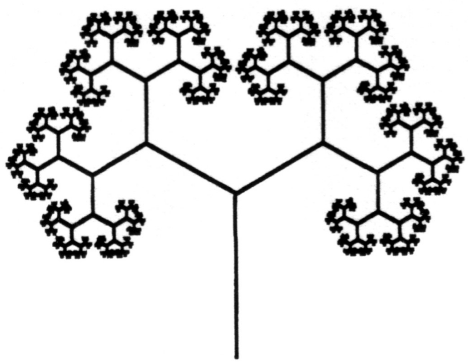


5 Fraktale

Zur Wiederholung:
Fraktale sind Figuren, die Selbstähnlichkeiten aufweisen, das heißt bei denen Teilfiguren eine verkleinerte Kopie der Gesamtfigur sind.

5.1 Der Goldene Baum

Der Goldene Baum ist ein Fraktal, bei dem zwischen den Teilfraktalen keine Zwischenräume offen bleiben; die Äste berühren sich. Der Verkleinerungsfaktor für den Goldenen Baum beträgt $f = \rho$.



5.2 Goldenes Dreiecksfraktal und Goldenes Quadratfraktal

Auch beim *Goldenen Dreiecksfraktal* und beim *Goldenen Quadratfraktal* ist der Verkleinerungsfaktor $f = \rho$.

5.3 Dimension des Fraktals

$$D = \frac{\log(2)}{\log\left(\frac{1}{f}\right)}$$

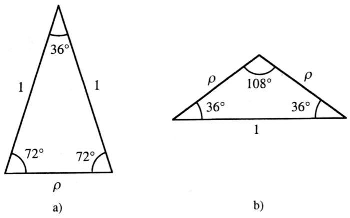
Dimension des Goldenen Baumes: $D = \frac{\log(2)}{\log(\tau)} \approx 1,440$

6 Regelmäßiges Fünfeck

6.1 Konstruktion

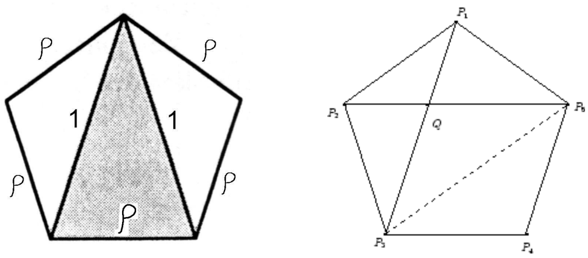
Die Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks kann mit Hilfe von Zirkel und Lineal durchgeführt werden.

6.2 Goldenes Dreieck



a) Spitzes Goldenes Dreieck mit den Basiswinkeln 72° und dem Spitzenwinkel 36°
b) Stumpfes Goldenes Dreieck mit den Basiswinkeln 36° und dem Spitzenwinkel 108°

6.3 Goldener Schnitt im regelmäßigen Fünfeck



- Seiten und Diagonalen stehen im Verhältnis des Goldenen Schnittes.
- Zwei Diagonalen, die sich nicht in einer Ecke des Fünfecks schneiden, teilen einander im Goldenen Schnitt.

7 Fibonacci-Zahlen

7.1 Linearisierung von Potenzen des Goldenen Schnittes

- Linearisierungsformel für Potenzen von τ und $(-\rho)$: $\tau^n = a_n\tau + a_{n-1}$ und $\rho^n = a_n\rho + a_{n-1}$
- a_n sind die Fibonacci-Zahlen mit der rekursiven Vorschrift: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ mit $a_1 = 1$ und $a_2 = 1$

7.2 Zusammenhang mit dem Goldenen Schnitt

- Explizite Darstellung der Fibonacci-Folge mit Hilfe des Goldenen Schnittes:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\tau^n - (-\rho)^n)$$

- Goldener Schnitt kann durch den Quotienten zweier aufeinanderfolgenden Fibonacci-Zahlen angenähert werden:

8 Goldener Schnitt in anderen Bereichen

Der Goldene Schnitt spielt nicht nur in der Mathematik, sondern auch in anderen Bereichen eine wichtige Rolle. Beispiele hierfür sind weit verbreitet, jedoch häufig auch umstritten. Sie lassen sich finden:

1. in der Architektur
2. in der Kunst
3. beim Körper des Menschen
4. in der Natur

9 Der Goldene Schnitt in der Schule

Im Lehrplan der 9.Klasse:

- Reelle Zahlen (irrationale Zahlen)
- Satz des Pythagoras
- Strahlensätze
- Quadratische Gleichungen
- Ähnliche Figuren

$\Rightarrow$ Verschiedene Themen des Lehrplans werden im „Goldenen Schnitt“ verarbeitet
$\Rightarrow$ Anschauliche Verwendung der gelernten Theorie

10 Verwendete Literatur

- Hans Walser: „Der Goldene Schnitt“
- Prof. Dr. Albrecht Beutelsbacher: „Der Goldene Schnitt“
- Wikipedia
- Encarta Enzyklopädie