Hyperbolische Geometrie

Markus Kern

15. Januar 2007

1 Die geschichtliche Entwicklung der Hyperbolischen Geometrie

Als Euklid um 325 v. Chr. seine 13-bändigen Elemente schrieb, legte er im ersten Buch fünf Postulate fest, welche elementare Aussagen über die Geometrie treffen und mit seinen Definitionen und Axiomen ein erstes formales logisches System der Geometrie darstellten.

Die fünf Postulate lauten folgendermaßen:

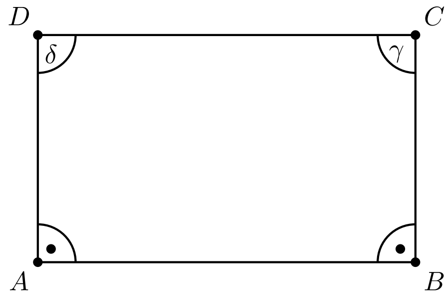
1. Es soll gefordert werden, dass sich von jedem Punkte nach jedem Punkte eine gerade Linie ziehen lasse.
2. Ferner, dass sich eine begrenzte Gerade stetig in gerader Linie verlängern lasse.
3. Ferner, dass sich mit jedem Mittelpunkt und Halbmesser ein Kreis beschreiben lasse.
4. Ferner, dass alle rechten Winkel einander gleich seien.
5. Endlich, wenn eine Gerade zwei Geraden trifft und mit ihnen auf derselben Seite innere Winkel bildet, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte, so sollen die beiden Geraden, ins Unendliche verlängert, schließlich auf der Seite zusammentreffen, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte.

Auffällig ist, dass das fünfte Postulat wesentlich länger und komplizierter formuliert ist als die anderen vier und dennoch ganz selbstverständlich erscheint. Dies führte dazu, dass über 2000 Jahre lang Mathematiker, Physiker u. a. versuchten das fünfte Postulat aus den anderen vier abzuleiten.
Beweisversuche stammen z. B. von Saccheri, Lambert, Legendre und vielen anderen.
Dabei wurde nicht nur das obige Axiomensystem zu Grunde gelegt, sondern auch das Axiomensystem von Kolmogorov, welches wir ja bereits letzte Woche kennen gelernt haben.
Die Beweisversuche waren genau so unterschiedlich wie die Personen, die sie führten. Es gab Versuche einen direkten Beweis zu erreichen, aber auch das Prinzip des indirekten Beweises wurde angewandt, hierbei wurde das Parallelenaxiom negiert und man versuchte daraus einen Widerspruch abzuleiten.
Jedoch scheiterten alle diese Beweise und nahezu gleichzeitig sowie weitestgehend unabhängig voneinander kamen drei Mathematiker zu der Überzeugung, dass das Parallelenaxiom nicht bewiesen werden kann, sondern dass es unabhängig von den anderen Axiomen ist. Diese drei Mathematiker waren J. Bolyai (1802-1860), Gauß (1777-1855) und Lobatschewski (1792-1856). Sie alle erkannten die Bedeutung einer Geometrie in der die Negation des Parallelenaxioms gilt. Als erster von ihnen publizierte Lobatschewski, 1826, eine Arbeit über diese Geometrie in der er erste Sätze und Folgerungen beschrieb, welche er aus einem Axiomensystem erhielt das aus dem Kolmogorovs Bestand mit dem Unterschied das das negierte Parallelenaxiom den Platz des euklidischen Parallelenaxioms einnahm.
Wegen den Arbeiten Lobatschewskis und der Tatsache, dass er als erster publizierte nennt man die hyperbolische Geometrie auch Lobatschewski Geometrie.

2 Sätze der absoluten Geometrie und Sätze welche das Parallelenaxiom benötigen

Warum scheiterten die vielen Beweisversuche der Mathematiker? Nun das lag daran, dass sie meist unwissentlich äquivalente Aussagen zum Parallelenaxiom verwendeten, so z. B. Saccheri, dessen "Beweis" folgendermaßen aussah:

Er betrachtete das folgende Viereck:



mit den Eigenschaften:

1. Die Winkel bei A und B sind Rechte.
2. Die Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ sind kongruent.

Als erstes wies er nach, dass die Winkel γ und δ kongruent sind.
Nun betrachtete er drei unterschiedliche Hypothesen:

1. Beide Winkel sind stumpfe Winkel
2. Beide Winkel sind rechte Winkel
3. Beide Winkel sind spitze Winkel

Die erste Hypothese konnte er mit Hilfe der Axiome der Inzidenz, des Abstands, der Anordnung und der Bewegung (=absolute Geometrie) widerlegen.
Ferner konnte er beweisen, dass falls die zweite Hypothese gilt daraus das Parallelenaxiom folgt und darüber hinaus zeigte er, dass die Existenz eines einzigen Saccherischen Vierecks mit vier rechten Winkeln reichen würde um daraus das Parallelenaxiom zu folgern.
Es reicht also ein einziges Saccherisches Viereck, welches die Hypothese vom rechten Winkel erfüllt, zu konstruieren. Und genau daran scheiterte der Beweis, denn die Konstruktion war ohne eine zum Parallelenaxiom äquivalente Aussage nicht möglich.
Um nun ein Gefühl dafür zu entwickeln welche Sätze auf welchen Axiomen beruhen möchte ich hier einige vorstellen.
Die Sätze der absoluten Geometrie gelten auch in der hyperbolischen Geometrie, deswegen ist es wichtig einige von ihnen zu kennen.
Sätze der absoluten Geometrie:
Bevor wir zu den Sätzen kommen benötigen wir erstmal eine Definition der Kongruenz.

Definition 1 (Kongruenz): Zwei Punktmengen M_1 und M_2 heißen zueinander kongruent ($M_1 \equiv M_2$), falls eine Bewegung φ existiert, die M_1 auf M_2 abbildet.

Hierbei stellt sich die Frage was eine Bewegung ist, das sagt uns die nachfolgende Definition:

Definition 2 (Bewegung): Als **Bewegungen** werden Abbildungen der Ebene auf sich bezeichnet, die Abstände beliebiger Punktepaare unverändert lassen.

Nun lassen sich leicht die aus der Schule bekannten Kongruenzsätze formulieren:

Satz A.1 (Kongruenzsatz "sws"): Sind $\overline{ABC}$ und $\overline{DEF}$ zwei Dreiecke und ist $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$ sowie $\angle(BAC) \equiv \angle(EDF)$, so sind die beiden Dreiecke $\overline{ABC}$ und $\overline{DEF}$ kongruent zueinander.

Satz A.2 (Kongruenzsatz "wsw"): Sind $\overline{ABC}$ und $\overline{DEF}$ zwei Dreiecke und ist $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\angle(BAC) \equiv \angle(EDF)$ sowie $\angle(ABC) \equiv \angle(DEF)$, so sind die beiden Dreiecke $\overline{ABC}$ und $\overline{DEF}$ kongruent.

Satz A.3 (Kongruenzsatz "sss"): Sind $\overline{ABC}$ und $\overline{DEF}$ Dreiecke mit $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$ und $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$, so sind die Dreiecke $\overline{ABC}$ und $\overline{DEF}$ kongruent.

Satz A.4 (Innenwinkelsatz der absoluten Geometrie): Die Innenwinkelsumme eines beliebigen Dreiecks ist stets kleiner oder gleich zwei Rechten.

Ein ganz wichtiger Satz zum Abschluss:

Satz A.5 (Existenz von Parallelen): Zu jeder Geraden g und zu jedem nicht auf g liegenden Punkt P gibt es mindestens eine Gerade h, die P enthält und zu g parallel ist.

Wie man sieht ist die Existenz von Parallelen allein aufgrund der Axiome der absoluten Geometrie sicher gestellt.

Sätze die das Parallelenaxiom benötigen:

Satz E.1 (Stufenwinkelsatz): Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen sind kongruent.

Satz E.2 (Wechselwinkelsatz): Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen sind kongruent.

Satz E.3 (Der Innenwinkelsatz der euklidischen Geometrie): In jedem Dreieck ist die Summe der Innenwinkel gleich zwei Rechten.

Satz E.4 ("starker" Außenwinkelsatz): Ein beliebiger Außenwinkel eines jeden Dreiecks ist so groß wie die Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel dieses Dreiecks.

Satz E.5 (Parallelogrammregel): Sind A, B, C und D vier nichtkollineare Punkte und sind die Geraden $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ sowie und zueinander parallel, dann gilt $|AB| = |CD|$ sowie $|AD| = |BC|$.

Wir kommen nun zu einem Satz, dessen Aussage trivial erscheinen mag, der aber auch nur bei Zugrundelegung des Parallelenaxioms gilt und somit keine Aussage der absoluten Geometrie ist.

Satz E.6 (Abstandslinien sind Geraden): Ist g eine beliebige Gerade und a eine beliebige reelle Zahl, so ist die Menge aller Punkte, die von g den Abstand a haben und in einer Halbebene bezüglich g liegen, eine zu g parallele Gerade (für $a \neq 0$) bzw. die Gerade g selbst (für $a = 0$).

3 Eine Reihe äquivalenter Aussagen zum Parallelenaxiom

Saccheris Bemühungen scheiterten an der Konstruktion eines Rechteckes.
Grund: Die Existenz von Rechtecken setzt das Parallelenaxiom voraus.
Bekannt: Aus der Hypothese des rechten Winkels folgt das Parallelenaxiom.
Ziel: Minimales Axiomensystem.

Auf der Grundlage der Axiome und Sätze der absoluten Geometrie sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Zu jeder Geraden g und zu jedem nicht auf g liegenden Punkt A gibt es höchstens eine Gerade, die durch A verläuft und zu g parallel ist (euklidisches Parallelenaxiom).
2. Es gilt der Stufenwinkelsatz bzw. der Wechselwinkelsatz.
3. In jedem Dreieck beträgt die Innenwinkelsumme 180°.
4. In (mindestens) einem Saccherischen Viereck gilt die Hypothese vom rechten Winkel.
5. Abstandslinien sind Geraden.

4 Das Axiomensystem der Hyperbolischen Geometrie

Nun sollten wir uns darüber klar werden wie unser Axiomensystem der Hyperbolischen Geometrie aussieht:

I. Inzidenzaxiome
II. Abstandsaxiome
III. Anordnungsaxiome
IV. Bewegungsaxiom

V.a Lobatschewskisches Parallelenaxiom
Es existiert eine Gerade g und ein nicht auf g liegenden Punkt P, durch den mindestens zwei Geraden verlaufen, die zu g parallel sind.

In dieser Form sieht man leicht ein, dass es sich um die Negation des euklidischen Parallelenaxioms handelt.

Weiterhin kann man noch mittels der Axiome der absoluten Geometrie folgende Form des L. Parallelenaxioms herleiten:

V.b Lobatschewskisches Parallelenaxiom (verallgemeinerte Fassung): Falls die Axiome der absoluten Geometrie und V' gelten, so existieren zu jeder Geraden g und zu jedem nicht auf g liegenden Punkt P mindestens zwei Geraden, die durch P verlaufen und zu g parallel sind.

5 Erste Sätze und Folgerungen. Unterschiede zur Euklidischen Geometrie

Satz 1: Zu jeder Geraden g und zu jedem nicht auf g liegenden Punkt P existieren unendlich viele Geraden, die durch P verlaufen und zu g parallel sind. (Euklid: Es existiert höchstens eine Parallele)

Satz 2 (Der Innenwinkelsatz der hyperbolischen Geometrie): In jedem Dreieck ist die Summe der Innenwinkel kleiner als zwei Rechte. (Euklid: Die Innenwinkel ergeben zusammen genau zwei Rechte.)

Satz 3: Die Winkelsumme eines jeden Vierecks ist kleiner als 360°. (Euklid: Die Winkelsumme ist genau 360°)

Satz 4: In der hyperbolischen Geometrie gilt in jedem Saccheri Viereck die Hypothese vom spitzen Winkel.(Euklid: Die Hypothese vom rechten Winkel trifft zu.)

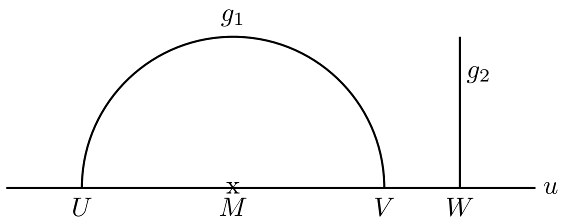
Satz 5: In der hyperbolischen Geometrie existieren keine Rechtecke.(Euklid: Rechtecke existieren.)

6 Das Cayley-Klein Modell

Bei diesem Modell lässt sich das Lobatschewski-Axiom besonders gut veranschaulichen. Die nichteuklidische Ebene (N-Ebene) ist in diesem Modell eine offene Kreisscheibe C mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r.
Die N-Punkte sind die euklidischen Punkte dieser offenen Kreisscheibe.
Die N-Geraden sind die Sehnen des Kreises.
Der Begriff der Parallelität wird im Cayley-Klein Modell folgendermaßen aufgefasst:
Zwei Geraden g und h liegen parallel, wenn die den Sehnen zugrunde liegenden Geraden sich im Äußeren des Kreises schneiden. Nun gibt es zu einer Geraden g und einem Punkt P, der nicht auf ihr liegt, unendlich viele zu g parallele Geraden durch P.
Nachteile liegen in diesem Modell darin, dass weder die Abstandsmessung noch die Winkelmessung wie in der euklidischen Geometrie durchgeführt werden kann, da sonst nicht alle Axiome der hyperbolischen Geometrie erfüllt werden können.

7 Das Poincaré Modell

Def. P1: Es sei eine beliebige euklidische Ebene ϵ und in dieser Ebene eine Gerade u gegeben.
a) Als nichteuklidische Ebene (N-Ebene) H bezeichnen wir eine der beiden offenen Halbebenen von ϵ bezüglich u.
b) Nichteuklidische Punkte (N-Punkte) nennen wir alle euklidischen Punkte der unter a) ausgezeichneten offenen Halbebene.
c) Nichteuklidische Geraden (N-Geraden) sind alle vollständig in H liegenden offenen Halbkreise, deren Mittelpunkte der (euklidischen) Geraden u angehören, und alle in H liegenden offenen Halbgeraden, deren Anfangspunkte u angehören. Die N-Geraden, welche als euklidische Halbkreise aufgefasst werden, nennen wir auch N-Geraden vom Typ 1, die als euklidische Halbgeraden aufgefassten N-Geraden vom Typ 2.



Um für dieses Modell einen geeigneten Abstand einführen zu können, der allen Axiomen genügt, benötigt man den Begriff des Doppelverhältnisses von Punkten einer Geraden und einige Eigenschaften dieses Doppelverhältnisses.

Definition: Es seien A, B, U und V vier Punkte einer Geraden g, und es sei auf g eine Richtung ausgezeichnet. Als **Doppelverhältnis der Punkte** A, B, U und V bezeichnen wir den Quotienten

$(A, B, U, V) := \frac{|AU||BV|}{|BU||AV|} = \frac{|AU|}{|BU|} : \frac{|AV|}{|BV|}$

wobei $|AU|$, $|BU|$, $|AV|$ und $|BV|$ gerichtete Streckenlängen sind, d. h. jede dieser Längen $|XY|$ ist positiv, falls Y rechts von X liegt und negativ, wenn X rechts von Y liegt.

Eigenschaften des Doppelverhältnisses:

1. Falls vier Punkte A, B, U und V paarweise voneinander verschieden sind und jeder der Punkte A und B zwischen den Punkten U und V liegt, so gilt $(A, B, U, V) > 0$.
2. Für vier beliebige (kollineare) Punkte A, B, U und V gilt:
$(A, B, U, V) = \frac{1}{(B,A,U,V)}$.
3. Für fünf beliebige (kollineare) Punkte A, B, C, U und V gilt $(A, C, U, V) = (A, B, U, V) \cdot (B, C, U, V)$.

Def. P2: Es seien A und B zwei N-Punkte, die auf einer N-Geraden vom Typ 1 mit den uneigentlichen Punkten U und V liegen sowie A' und B' die Fußpunkte der Lote von A bzw. B auf u. Weiterhin seien C und D zwei Punkte, die auf einer N-Geraden vom Typ 2 mit dem uneigentlichen Punkt $W \in u$ liegen. Als nichteuklidischen (N-)Abstand der Punkte A und B sowie der Punkte C und D bezeichnen wir

$|AB|_N := \frac{1}{2}|ln\,(A', B', U, V)\,|$ bzw. $|CD|_N := \left|ln\frac{|DW|}{|CW|}\right|$

Wegen der Eigenschaft 1 des Doppelverhältnisses und der Tatsache, dass die Punkte A' und B' zwischen den Punkten U und V liegen, ist (A', B', U, V) stets positiv und $ln(A', B', U, V)$ somit definiert. Auf das Einsetzen gerichteter Streckenlängen kann bei dieser Anwendung des Doppelverhältnisses verzichtet werden.

Folgerung P1: Falls ein kartesisches Koordinatensystem gegeben ist, dessen x-Achse auf der Randgeraden u der nichteuklidischen Ebene H liegt und A, B, C, D, U und V Punkte wie in Def. P2 beschrieben sowie (x_A, y_A), (x_B, y_B), (x_C, y_C), (x_D, y_D), $(x_U, 0)$ und $(x_V, 0)$ die Koordinaten dieser Punkte sind, so gilt

$|AB|_N := \frac{1}{2}\left|ln\left(\frac{(x_U-x_A)(x_V-x_B)}{(x_U-x_B)(x_V-x_A)}\right)\right|$ sowie $|CD|_N := \left|ln\frac{|y_D|}{|y_C|}\right|$.

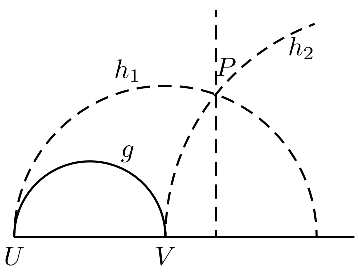
Definition (Inversion): Es sei in einer (euklidischen) Ebene ein Kreis K mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r gegeben. Die Abbildung, die jedem Punkt A der Ebene einen Bildpunkt A' mit $A' \in AM$ zuordnet, wird als Inversion am Kreis K bezeichnet. Der Punkt M heißt Inversionspol und der Radius r Inversionsradius dieser Inversion. Dabei muss die Inversion die folgenden Eigenschaften erfüllen:

1. $|MA| \cdot |MA'| = r^2$
2. M, A und A' liegen auf einer Geraden

Koordinatendarstellung einer Inversion:
Kartesisches Koordinatensystem mit Koordinatenursprung identisch dem Mittelpunkt M des Kreises K.
Aus $A' \in AM$ folgt, mit $A(x,y)$ und $A'(x',y')$, $\frac{y'}{x'} = \frac{y}{x}$ und nach der
Definition der Inversion ist $|MA| \cdot |MA'| = \sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{x'^2+y'^2} = r^2$
Es ergibt sich: $x' = r^2 \cdot \frac{x}{x^2+y^2}$ und $y' = r^2 \cdot \frac{y}{x^2+y^2}$

Def. P3: Als Maß des Winkels zweier N-Geraden g und h, die sich in einem Punkt P schneiden, bezeichnen wir das Maß des euklidischen Winkels zwischen den Tangenten an g und h im Punkt P, falls g und h N-Geraden vom Typ 1 sind, beziehungsweise das Maß des euklidischen Winkels zwischen g und der Tangente an h im Punkt P, falls g eine N-Gerade des Typs 2 ist.

Nachweis des Parallelenaxioms:



Da es zwei verschiedene Typen von N-Geraden gibt ist die obige Grafik nur ein möglicher Fall.
Die Geraden h_1 und h_2 stellen die Grenzparallelen zu g dar, welche durch den Punkt P gehen.
Weitere Parallelen (die überparallelen N-Geraden) verhalten sich wie die N-Gerade vom Typ 2, die durch den Punkt P verläuft. Diese Parallelen dürfen erstens die N-Gerade g nicht schneiden, zweitens müssen sie durch den Punkt P gehen und drittens muss einer ihrer “Schnittpunkte” mit der Randgeraden, zwischen dem rechten “Schnittpunkt” von g_1 (mit der Randgeraden) und dem linken “Schnittpunkt” von g_2 (ebenfalls mit der Randgeraden) liegen.