Rund um π

Katharina Blaszczok

Proseminar für Lehramt

18.12.2006

Überblick

1. Definitionen für die Konstante π
2. Geschichte der Näherungen von π
3. Besondere Eigenschaften der Kreiszahl
4. Kurioses

Überblick

1. Definitionen für die Konstante π
2. Geschichte der Näherungen von π
3. Besondere Eigenschaften der Kreiszahl
4. Kurioses

Überblick

Überblick

1. Definitionen für die Konstante π
2. Geschichte der Näherungen von π
3. Besondere Eigenschaften der Kreiszahl
4. Kurioses

Erste Begegnungen

Die bekanntesten Definitionen der Kreiszahl π stammen aus der Geometrie. Voraussetzung für diese Definitionen ist, dass der Raum euklidisch, d. h. ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt ist. Das Skalarprodukt ermöglicht die Definition von Winkeln und Abständen.

Für den Umfang U und den Flächeninhalt A eines Kreises gilt:

$$\boxed{U := 2\pi r \qquad\qquad A := \pi r^2}$$

Das heißt:

- für $r = \frac{1}{2}$ ist $\pi = U$
- für $r = 1$ ist $\pi = A$

Erste Begegnungen

Die bekanntesten Definitionen der Kreiszahl π stammen aus der Geometrie. Voraussetzung für diese Definitionen ist, dass der Raum euklidisch, d. h. ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt ist. Das Skalarprodukt ermöglicht die Definition von Winkeln und Abständen.
Für den Umfang U und den Flächeninhalt A eines Kreises gilt:

$$\boxed{U := 2\pi r \qquad\qquad A := \pi r^2}$$

Das heißt:

- für $r = \frac{1}{2}$ ist $\pi = U$
- für $r = 1$ ist $\pi = A$

π als Verhältnis „Umfang zu Durchmesser“

Unter der Annahme, dass der Raum euklidisch ist, kann man zeigen: Das Verhältnis $\frac{U}{2r}$ ist unabhängig vom Radius des Kreises, also konstant.

Man betrachte zwei konzentrische Kreise K_1 und K_2 mit den Radien r_1 und r_2 und den Umfängen U_1 und U_2. Beschreibt man beiden zwei reguläre Vielecke gleicher Seitenzahl (mit der Seitenlänge a_1 bzw. a_2) so ein, dass die Seiten parallel sind, folgt aus dem zweiten Strahlensatz:

$$\begin{aligned} r_1 : r_2 &= a_1 : a_2 \\ a_2 : r_2 &= a_1 : r_1 \end{aligned}$$

Multipliziert man nun beide Seiten der Gleichung mit der Anzahl der Vieleckseiten, ergibt sich:

$$U_2 : r_2 = U_1 : r_1$$

π als Verhältnis „Umfang zu Durchmesser“

Unter der Annahme, dass der Raum euklidisch ist, kann man zeigen: Das Verhältnis $\frac{U}{2r}$ ist unabhängig vom Radius des Kreises, also konstant.
Man betrachte zwei konzentrische Kreise K_1 und K_2 mit den Radien r_1 und r_2 und den Umfängen U_1 und U_2. Beschreibt man beiden zwei reguläre Vielecke gleicher Seitenzahl (mit der Seitenlänge a_1 bzw. a_2) so ein, dass die Seiten parallel sind, folgt aus dem zweiten Strahlensatz:

$$\begin{aligned} r_1 : r_2 &= a_1 : a_2 \\ a_2 : r_2 &= a_1 : r_1 \end{aligned}$$

Multipliziert man nun beide Seiten der Gleichung mit der Anzahl der Vieleckseiten, ergibt sich:

$$U_2 : r_2 = U_1 : r_1$$

π als Verhältnis „Umfang zu Durchmesser“

Unter der Annahme, dass der Raum euklidisch ist, kann man zeigen: Das Verhältnis $\frac{U}{2r}$ ist unabhängig vom Radius des Kreises, also konstant.
Man betrachte zwei konzentrische Kreise K_1 und K_2 mit den Radien r_1 und r_2 und den Umfängen U_1 und U_2. Beschreibt man beiden zwei reguläre Vielecke gleicher Seitenzahl (mit der Seitenlänge a_1 bzw. a_2) so ein, dass die Seiten parallel sind, folgt aus dem zweiten Strahlensatz:

$$\begin{aligned} r_1 : r_2 &= a_1 : a_2 \\ a_2 : r_2 &= a_1 : r_1 \end{aligned}$$

Multipliziert man nun beide Seiten der Gleichung mit der Anzahl der Vieleckseiten, ergibt sich:

$$U_2 : r_2 = U_1 : r_1$$

π als Verhältnis „Kreisfläche zu Radius im Quadrat“

Von dem Verhältnis $\pi = \frac{A}{r^2}$ ausgehend kann man für π folgende arithmetische Definition angeben:

1. Man zeichne ein quadratisches Gitter aus $(2n+1) \times (2n+1)$ Punkten mit den gleichmäßigen Abständen $\frac{1}{n}$. Jedem Punkt wird ein Koordinatenpaar zugeordnet.
2. Man zähle die Punkte, welche der Bedingung $x^2 + y^2 < n^2$ genügen.
3. Man teile die Anzahl k der gefundenen Punkte durch die gesamte Anzahl der Punkte und multipliziere das Ergebnis mit 4.

$$\pi \approx p_n = \frac{k}{(2n+1)^2} 4$$

π als Verhältnis „Kreisfläche zu Radius im Quadrat“

Von dem Verhältnis $\pi = \frac{A}{r^2}$ ausgehend kann man für π folgende arithmetische Definition angeben:

1. Man zeichne ein quadratisches Gitter aus $(2n+1) \times (2n+1)$ Punkten mit den gleichmäßigen Abständen $\frac{1}{n}$. Jedem Punkt wird ein Koordinatenpaar zugeordnet.
2. Man zähle die Punkte, welche der Bedingung $x^2 + y^2 < n^2$ genügen.
3. Man teile die Anzahl k der gefundenen Punkte durch die gesamte Anzahl der Punkte und multipliziere das Ergebnis mit 4.

$$\pi \approx p_n = \frac{k}{(2n+1)^2} 4$$

π als Verhältnis „Kreisfläche zu Radius im Quadrat“

Von dem Verhältnis $\pi = \frac{A}{r^2}$ ausgehend kann man für π folgende arithmetische Definition angeben:

1. Man zeichne ein quadratisches Gitter aus $(2n+1) \times (2n+1)$ Punkten mit den gleichmäßigen Abständen $\frac{1}{n}$. Jedem Punkt wird ein Koordinatenpaar zugeordnet.
2. Man zähle die Punkte, welche der Bedingung $x^2 + y^2 < n^2$ genügen.
3. Man teile die Anzahl k der gefundenen Punkte durch die gesamte Anzahl der Punkte und multipliziere das Ergebnis mit 4.

$$\pi \approx p_n = \frac{k}{(2n+1)^2} 4$$

π als Verhältnis „Kreisfläche zu Radius im Quadrat“

Von dem Verhältnis $\pi = \frac{A}{r^2}$ ausgehend kann man für π folgende arithmetische Definition angeben:

1. Man zeichne ein quadratisches Gitter aus $(2n+1) \times (2n+1)$ Punkten mit den gleichmäßigen Abständen $\frac{1}{n}$. Jedem Punkt wird ein Koordinatenpaar zugeordnet.
2. Man zähle die Punkte, welche der Bedingung $x^2 + y^2 < n^2$ genügen.
3. Man teile die Anzahl k der gefundenen Punkte durch die gesamte Anzahl der Punkte und multipliziere das Ergebnis mit 4.

$$\pi \approx p_n = \frac{k}{(2n+1)^2} 4$$

Weitere geometrische Definitionen

Volumen einer Kugel:

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi r^3}{3} \\ \pi &= \frac{3}{4} V \qquad (r = 1) \end{aligned}$$

Oberfläche einer Kugel:

$$\begin{aligned} O &= 4\pi r^2 \\ \pi &= \frac{1}{4} O \qquad (r = 1) \end{aligned}$$

Weitere geometrische Definitionen

Volumen einer Kugel:

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi r^3}{3} \\ \pi &= \frac{3}{4}V \qquad (r = 1) \end{aligned}$$

Oberfläche einer Kugel:

$$\begin{aligned} O &= 4\pi r^2 \\ \pi &= \frac{1}{4}O \qquad (r = 1) \end{aligned}$$

Zwei experimentelle Methoden

Monte-Carlo-Methode: Experimentelle Ermittlung von π durch werfen von Pfeilen auf eine quadratische Zielscheibe mit einem eingeschriebenen Kreis. Alternativ: Wahl zweier Zufallszahlen zwischen $-m$ und m ($m \in \mathbb{N}$), Überprüfung der Bedingung $(x/m)^2 + (y/m)^2 \leq 1$.

Die Buffonschen Nadeln: Eine Nadel der Länge n, geworfen auf Dielenbretter der Breite b berührt oder schneidet einen Rand eines Dielenbrettes mit der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{2n}{b\pi}$.

Zwei experimentelle Methoden

Monte-Carlo-Methode: Experimentelle Ermittlung von π durch werfen von Pfeilen auf eine quadratische Zielscheibe mit einem eingeschriebenen Kreis. Alternativ: Wahl zweier Zufallszahlen zwischen $-m$ und m ($m \in \mathbb{N}$), Überprüfung der Bedingung $(x/m)^2 + (y/m)^2 \leq 1$.

Die Buffonschen Nadeln: Eine Nadel der Länge n, geworfen auf Dielenbretter der Breite b berührt oder schneidet einen Rand eines Dielenbrettes mit der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{2n}{b\pi}$.

Weitere Definitionen

- $\frac{\pi}{2}$ ist die kleinste positive Nullstelle von $\cos x$ für $0 < x < 2$.
- Kettenbruchdarstellung:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \dots}}}$$

- Integraldarstellung:

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}$$

- ...

Weitere Definitionen

- $\frac{\pi}{2}$ ist die kleinste positive Nullstelle von $\cos x$ für $0 < x < 2$.
- Kettenbruchdarstellung:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2+\frac{5^2}{2+\dots}}}$$

- Integraldarstellung:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

- ...

Weitere Definitionen

- $\frac{\pi}{2}$ ist die kleinste positive Nullstelle von $\cos x$ für $0 < x < 2$.
- Kettenbruchdarstellung:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \dots}}}$$

- Integraldarstellung:

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}$$

- ...

Die arithmetische Quadratur

Vorgehen:

- Einteilung des Radius eines Viertelkreises in n Intervalle der Länge $\frac{r}{n}$
- Berechnung der zu einem Intervallrand gehörigen y-Werte durch den Satz des Pythagoras:

$$y_i^2 = r^2 - \left(i \cdot \frac{r}{n}\right)^2$$

  Die Fläche eines Rechtecks beträgt dann $A = y_i \cdot \frac{r}{n}$
- Für die Fläche des Kreises gilt:

Vorgehen:

- Einteilung des Radius eines Viertelkreises in n Intervalle der Länge $\frac{r}{n}$
- Berechnung der zu einem Intervallrand gehörigen y-Werte durch den Satz des Pythagoras:

$$y_i^2 = r^2 - \left(i \cdot \frac{r}{n}\right)^2$$

Die Fläche eines Rechtecks beträgt dann $A = y_i \cdot \frac{r}{n}$

- Für die Fläche des Kreises gilt:

Die arithmetische Quadratur

Vorgehen:

- Einteilung des Radius eines Viertelkreises in n Intervalle der Länge $\frac{r}{n}$
- Berechnung der zu einem Intervallrand gehörigen y-Werte durch den Satz des Pythagoras:

$$y_i^2 = r^2 - \left(i \cdot \frac{r}{n}\right)^2$$

  Die Fläche eines Rechtecks beträgt dann $A = y_i \cdot \frac{r}{n}$
- Für die Fläche des Kreises gilt:

Vorgehen:

- Einteilung des Radius eines Viertelkreises in n Intervalle der Länge $\frac{r}{n}$
- Berechnung der zu einem Intervallrand gehörigen y-Werte durch den Satz des Pythagoras:

$$y_i^2 = r^2 - \left(i \cdot \frac{r}{n}\right)^2$$

  Die Fläche eines Rechtecks beträgt dann $A = y_i \cdot \frac{r}{n}$
- Für die Fläche des Kreises gilt:

Die arithmetische Quadratur

$$\frac{A_n}{4} = \frac{r}{n} \cdot (y_1 + y_2 + y_3 + \ldots)$$

$$A_n = 4 \cdot \frac{r}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$A_n = 4 \cdot \frac{r}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{r}{n} \sqrt{n^2 - i^2} \right)$$

$$A_n = 4 \cdot \frac{r^2}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sqrt{n^2 - i^2}$$

$$A_n = r^2 \cdot \frac{4}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sqrt{n^2 - i^2}$$

Die arithmetische Quadratur

$$
\begin{aligned}
\frac{A_n}{4} &= \frac{r}{n} \cdot (y_1 + y_2 + y_3 + \ldots) \\
A_n &= 4 \cdot \frac{r}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i \\
A_n &= 4 \cdot \frac{r}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{r}{n} \sqrt{n^2 - i^2} \right) \\
A_n &= 4 \cdot \frac{r^2}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sqrt{n^2 - i^2} \\
A_n &= r^2 \cdot \frac{4}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sqrt{n^2 - i^2}
\end{aligned}
$$

Die arithmetische Quadratur

$$
\begin{aligned}
\frac{A_n}{4} &= \frac{r}{n} \cdot (y_1 + y_2 + y_3 + \dots) \\
A_n &= 4 \cdot \frac{r}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i \\
A_n &= 4 \cdot \frac{r}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{r}{n} \sqrt{n^2 - i^2} \right) \\
A_n &= 4 \cdot \frac{r^2}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sqrt{n^2 - i^2} \\
A_n &= r^2 \cdot \frac{4}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sqrt{n^2 - i^2}
\end{aligned}
$$

Die arithmetische Quadratur

$$
\begin{aligned}
\frac{A_n}{4} &= \frac{r}{n} \cdot (y_1 + y_2 + y_3 + \ldots) \\
A_n &= 4 \cdot \frac{r}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i \\
A_n &= 4 \cdot \frac{r}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{r}{n} \sqrt{n^2 - i^2} \right) \\
A_n &= 4 \cdot \frac{r^2}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sqrt{n^2 - i^2} \\
A_n &= r^2 \cdot \frac{4}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sqrt{n^2 - i^2}
\end{aligned}
$$

Die arithmetische Quadratur

$$
\begin{aligned}
\frac{A_n}{4} &= \frac{r}{n} \cdot (y_1 + y_2 + y_3 + \ldots) \\
A_n &= 4 \cdot \frac{r}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i \\
A_n &= 4 \cdot \frac{r}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{r}{n} \sqrt{n^2 - i^2} \right) \\
A_n &= 4 \cdot \frac{r^2}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sqrt{n^2 - i^2} \\
A_n &= r^2 \cdot \frac{4}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sqrt{n^2 - i^2}
\end{aligned}
$$

Überblick über Näherungsmethoden

1. Altertum: Approximation durch experimentelle Methoden
2. Antike: geometrische Approximation
3. 17. Jhdt.: analytische Approximaiton
4. 20. Jhdt.: Hochleistungsalgorithmen

Überblick über Näherungsmethoden

1. Altertum: Approximation durch experimentelle Methoden
2. Antike: geometrische Approximation
3. 17. Jhdt.: analytische Approximaiton
4. 20. Jhdt.: Hochleistungsalgorithmen

Überblick über Näherungsmethoden

1. Altertum: Approximation durch experimentelle Methoden
2. Antike: geometrische Approximation
3. 17. Jhdt.: analytische Approximaiton
4. 20. Jhdt.: Hochleistungsalgorithmen

Überblick über Näherungsmethoden

1. Altertum: Approximation durch experimentelle Methoden
2. Antike: geometrische Approximation
3. 17. Jhdt.: analytische Approximaiton
4. 20. Jhdt.: Hochleistungsalgorithmen

Geometrische Methode nach Archimedes

Es handelt sich um das erste systematische Verfahren, das erlaubt, sich dem Wert von π beliebig genau anzunähern.

Vorgehen:

- Einem Kreis mit Radius $r = 1$ wird ein Sechseck einbeschrieben und ein weiteres umbeschrieben.
- Durch herstellen von Beziehungen zwischen Seitenverhältnissen gelangt Archimedes vom n-Eck zum $2n$-Eck.
- Für das umbeschriebene Polygon gilt: $U_{2n} = n \cdot \tan(\alpha)$
  Für das einbeschriebene Polygon gilt: $U_{2n} = n \cdot \sin(\alpha)$

Geometrische Methode nach Archimedes

Es handelt sich um das erste systematische Verfahren, das erlaubt, sich dem Wert von π beliebig genau anzunähern.

Vorgehen:

- Einem Kreis mit Radius $r = 1$ wird ein Sechseck einbeschrieben und ein weiteres umbeschrieben.
- Durch herstellen von Beziehungen zwischen Seitenverhältnissen gelangt Archimedes vom n-Eck zum $2n$-Eck.
- Für das umbeschriebene Polygon gilt: $U_{2n} = n \cdot \tan(\alpha)$
  Für das einbeschriebene Polygon gilt: $U_{2n} = n \cdot \sin(\alpha)$

Geometrische Methode nach Archimedes

Es handelt sich um das erste systematische Verfahren, das erlaubt, sich dem Wert von π beliebig genau anzunähern.

Vorgehen:

- Einem Kreis mit Radius $r = 1$ wird ein Sechseck einbeschrieben und ein weiteres umbeschrieben.
- Durch herstellen von Beziehungen zwischen Seitenverhältnissen gelangt Archimedes vom n-Eck zum $2n$-Eck.
- Für das umbeschriebene Polygon gilt: $U_{2n} = n \cdot \tan(\alpha)$
  Für das einbeschriebene Polygon gilt: $U_{2n} = n \cdot \sin(\alpha)$

Geometrische Methode nach Archimedes

Es handelt sich um das erste systematische Verfahren, das erlaubt, sich dem Wert von π beliebig genau anzunähern.

Vorgehen:

- Einem Kreis mit Radius $r = 1$ wird ein Sechseck einbeschrieben und ein weiteres umbeschrieben.
- Durch herstellen von Beziehungen zwischen Seitenverhältnissen gelangt Archimedes vom n-Eck zum $2n$-Eck.
- Für das umbeschriebene Polygon gilt: $U_{2n} = n \cdot \tan(\alpha)$
  Für das einbeschriebene Polygon gilt: $U_{2n} = n \cdot \sin(\alpha)$

Geometrische Methode nach Archimedes

- Um die Seitenanzahl zu verdoppeln, muss man die Formeln mit der Anzahl der Ecken multiplizieren und den Winkel α proportional verkleinern.

  Umbeschriebenes Polygon:

  $$U_{n\cdot 2^k} = 2^k \cdot n \cdot \tan\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)$$

  Einbeschriebenes Polygon:

  $$U_{n\cdot 2^k} = 2^k \cdot n \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)$$

Geometrische Methode nach Archimedes

- Um die Seitenanzahl zu verdoppeln, muss man die Formeln mit der Anzahl der Ecken multiplizieren und den Winkel α proportional verkleinern.
  Umbeschriebenes Polygon:

  $$U_{n\cdot 2^k} = 2^k \cdot n \cdot \tan\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)$$

  Einbeschriebenes Polygon:

  $$U_{n\cdot 2^k} = 2^k \cdot n \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)$$

Geometrische Methode nach Archimedes

- Um die Seitenanzahl zu verdoppeln, muss man die Formeln mit der Anzahl der Ecken multiplizieren und den Winkel α proportional verkleinern.
  Umbeschriebenes Polygon:

$$U_{n\cdot 2^k} = 2^k \cdot n \cdot \tan\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)$$

  Einbeschriebenes Polygon:

$$U_{n\cdot 2^k} = 2^k \cdot n \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)$$

Geometrische Methode nach Archimedes

- Die Umfänge müssen halbiert werden, da der Durchmesser in diesem Fall $d = 2$ ist.
- Mit $n = 6$ kann man nun die Iteration ausführen.
- Nach vier Iterationsschritten gelangte Archimedes zu der Näherung

$$\boxed{\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7} \qquad\qquad 3,1408\ldots < \pi < 3,1428\ldots}$$

Geometrische Methode nach Archimedes

- Die Umfänge müssen halbiert werden, da der Durchmesser in diesem Fall $d = 2$ ist.
- Mit $n = 6$ kann man nun die Iteration ausführen.
- Nach vier Iterationsschritten gelangte Archimedes zu der Näherung

$$\boxed{\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7} \qquad\qquad 3,1408\ldots < \pi < 3,1428\ldots}$$

Geometrische Methode nach Archimedes

- Die Umfänge müssen halbiert werden, da der Durchmesser in diesem Fall $d = 2$ ist.
- Mit $n = 6$ kann man nun die Iteration ausführen.
- Nach vier Iterationsschritten gelangte Archimedes zu der Näherung

$$\boxed{\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7} \qquad\qquad 3,1408\ldots < \pi < 3,1428\ldots}$$

π als unendliches Produkt nach Vieta

François Viète gibt 1593 als erster ein unendliches Produkt als Näherung für die Kreiszahl an.

Vorgehen:

- Es seien s_n die Seitenlänge und u_n der Umfang eines regelmäßigen, dem Einheitskreis einbeschriebenen $2 \cdot 2^n$-Ecks. Für den Umfang des Polygons gilt dann:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} u_n = \pi$$

- Man kann zeigen: Für die Seitenlänge s_{2n} gilt:

$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$$

π als unendliches Produkt nach Vieta

François Viète gibt 1593 als erster ein unendliches Produkt als Näherung für die Kreiszahl an.

Vorgehen:

- Es seien s_n die Seitenlänge und u_n der Umfang eines regelmäßigen, dem Einheitskreis einbeschriebenen $2 \cdot 2^n$-Ecks. Für den Umfang des Polygons gilt dann:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} u_n = \pi$$

- Man kann zeigen: Für die Seitenlänge s_{2n} gilt:

$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$$

π als unendliches Produkt nach Vieta

François Viète gibt 1593 als erster ein unendliches Produkt als Näherung für die Kreiszahl an.

Vorgehen:

- Es seien s_n die Seitenlänge und u_n der Umfang eines regelmäßigen, dem Einheitskreis einbeschriebenen $2 \cdot 2^n$-Ecks. Für den Umfang des Polygons gilt dann:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} u_n = \pi$$

- Man kann zeigen: Für die Seitenlänge s_{2n} gilt:

$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$$

π als unendliches Produkt nach Vieta

- Die Umfänge der Polygone sehen wie folgt aus:

$$
\begin{array}{lll}
\text{„Zweieck“:} & u_0 & = 2 \cdot 2 \\
\text{Quadrat:} & u_1 & = 4 \cdot \sqrt{2} \\
\text{Achteck:} & u_2 & = 8 \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}} \\
\text{16-Eck:} & u_3 & = 16 \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} \\
\text{32-Eck:} & u_4 & = 32 \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}
\end{array}
$$

- Da der Umfang für $n \longrightarrow \infty$ aus einer immer größer werdenden Zweierpotenz und einem immer kleiner werdendem Wurzelausdruck besteht, führt dies bei der Berechnung durch einen Computer zu Auslöschungseffekten.

π als unendliches Produkt nach Vieta

- Die Umfänge der Polygone sehen wie folgt aus:

$$
\begin{array}{lll}
\text{„Zweieck“:} & u_0 & = 2 \cdot 2 \\
\text{Quadrat:} & u_1 & = 4 \cdot \sqrt{2} \\
\text{Achteck:} & u_2 & = 8 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} \\
\text{16-Eck:} & u_3 & = 16 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \\
\text{32-Eck:} & u_4 & = 32 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}
\end{array}
$$

- Da der Umfang für $n \longrightarrow \infty$ aus einer immer größer werdenden Zweierpotenz und einem immer kleiner werdendem Wurzelausdruck besteht, führt dies bei der Berechnung durch einen Computer zu Auslöschungseffekten.

π als unendliches Produkt nach Vieta

- Man betrachtet stattdessen die Quotienten zweier aufeinanderfolgender Umfänge:

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$
$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$
$$\frac{u_3}{u_2} = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

- Das Produkt dieser Quotienten, multipliziert mit $u_0 = 2$ heißt:

$$u_0 \prod_{k=1}^{n} \frac{u_k}{u_{k-1}} = u_0 \cdot \frac{u_1}{u_0} \cdot \frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{u_3}{u_2} \cdot \ldots \cdot \frac{u_n}{u_{n-1}} = u_n$$

π als unendliches Produkt nach Vieta

- Man betrachtet stattdessen die Quotienten zweier aufeinanderfolgender Umfänge:

$$
\begin{aligned}
\frac{u_1}{u_0} &= \frac{2}{\sqrt{2}} \\
\frac{u_2}{u_1} &= \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \\
\frac{u_3}{u_2} &= \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}
\end{aligned}
$$

- Das Produkt dieser Quotienten, multipliziert mit $u_0 = 2$ heißt:

$$u_0 \prod_{k=1}^{n} \frac{u_k}{u_{k-1}} = u_0 \cdot \frac{u_1}{u_0} \cdot \frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{u_3}{u_2} \cdot \ldots \cdot \frac{u_n}{u_{n-1}} = u_n$$

π als unendliches Produkt nach Vieta

- Das Unendliche Produkt von Vieta ergibt sich nun, wenn man dieses Produkt gegen unendlich streben läßt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(u_0 \prod_{k=1}^{n} \frac{u_k}{u_{k-1}}\right) \quad = \pi$$

$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot \frac{2}{\sqrt{2}}\cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdot \ldots \quad = \pi$$

- Diese Schreibweise für π vermeidet bei Berechnung mittels Computer den Auslöschungseffekt.

Arcustangensreihe von Gregory

Nach der Entstehung der Differential- und Integralrechnung (unabhängig von Isaac Newton und Gottfried Wilhelm Leibniz vorgelegt) entdeckte James Gregory (1638 – 1675), dass die Fläche unter dem Graphen von $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ zwischen 0 und x den Wert $\arctan x$ besitzt. Das heißt:

$$\begin{aligned}
(\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2} \\
&= \frac{1}{1-(-x^2)} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (-x^2)^i \\
&= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + - \ldots
\end{aligned}$$

Arcustangensreihe von Gregory

Nach der Entstehung der Differential- und Integralrechnung (unabhängig von Isaac Newton und Gottfried Wilhelm Leibniz vorgelegt) entdeckte James Gregory $(1638 - 1675)$, dass die Fläche unter dem Graphen von $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ zwischen 0 und x den Wert $\arctan x$ besitzt. Das heißt:

$$
\begin{aligned}
(\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2} \\
&= \frac{1}{1-(-x^2)} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (-x^2)^i \\
&= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + - \ldots
\end{aligned}
$$

Arcustangensreihe von Gregory

Durch Integration der einzelnen Summenglieder erhält man die Gregory-Reihe:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$$

Da $\tan \frac{\pi}{4} = 1$, gilt $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

$$\arctan 1 = x - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - + \ldots$$

Allerdings konvergiert die Reihe für $x = 1$ sehr langsam gegen $\frac{\pi}{4}$.

Arcustangensreihe von Gregory

Durch Integration der einzelnen Summenglieder erhält man die Gregory-Reihe:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$$

Da $\tan \frac{\pi}{4} = 1$, gilt $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

$$\arctan 1 = x - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - + \ldots$$

Allerdings konvergiert die Reihe für $x = 1$ sehr langsam gegen $\frac{\pi}{4}$.

Arcustangensreihe von Gregory

Durch Integration der einzelnen Summenglieder erhält man die Gregory-Reihe:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$$

Da $\tan \frac{\pi}{4} = 1$, gilt $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

$$\arctan 1 = x - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - + \ldots$$

Allerdings konvergiert die Reihe für $x = 1$ sehr langsam gegen $\frac{\pi}{4}$.

Arcustangensreihe von Gregory

Durch Integration der einzelnen Summenglieder erhält man die Gregory-Reihe:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$$

Da $\tan \frac{\pi}{4} = 1$, gilt $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

$$\arctan 1 = x - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - + \ldots$$

Allerdings konvergiert die Reihe für $x = 1$ sehr langsam gegen $\frac{\pi}{4}$.

Arcustangens-Formel von Machin

John Machin fand 1706 eine Zerlegung der Formel Gregorys, welche wesentlich schneller konvergiert und zur Grundlage aller weiterer Berechnungen wurde.

Vorgehen:

- Sei $\arctan\frac{1}{5} = \alpha$. Dann gilt: $\tan\alpha = \frac{1}{5}$.
- Additionstheorem: $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$

$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha+\alpha) = \frac{2\cdot\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \frac{5}{12}$$

$$\tan 4\alpha = \tan(2\alpha+2\alpha) = \frac{2\cdot\tan 2\alpha}{1-\tan^2 2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{5}{12}}{1-\frac{25}{144}} = \frac{120}{119}$$

Arcustangens-Formel von Machin

John Machin fand 1706 eine Zerlegung der Formel Gregorys, welche wesentlich schneller konvergiert und zur Grundlage aller weiterer Berechnungen wurde.

Vorgehen:

- Sei $\arctan\frac{1}{5} = \alpha$. Dann gilt: $\tan\alpha = \frac{1}{5}$.
- Additionstheorem: $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\cdot\tan\beta}$

$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha+\alpha) = \frac{2\cdot\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \frac{5}{12}$$

$$\tan 4\alpha = \tan(2\alpha+2\alpha) = \frac{2\cdot\tan 2\alpha}{1-\tan^2 2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{5}{12}}{1-\frac{25}{144}} = \frac{120}{119}$$

Arcustangens-Formel von Machin

John Machin fand 1706 eine Zerlegung der Formel Gregorys, welche wesentlich schneller konvergiert und zur Grundlage aller weiterer Berechnungen wurde.

Vorgehen:

- Sei $\arctan \frac{1}{5} = \alpha$. Dann gilt: $\tan \alpha = \frac{1}{5}$.
- Additionstheorem: $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$

$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha + \alpha) = \frac{2 \cdot \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12}$$

$$\tan 4\alpha = \tan(2\alpha + 2\alpha) = \frac{2 \cdot \tan 2\alpha}{1 - \tan^2 2\alpha} = \frac{2 \cdot \frac{5}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119}$$

Arcustangens-Formel von Machin

- $\tan\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{239} \quad \Longrightarrow \quad \arctan\frac{1}{239} = 4\alpha - \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}
\arctan\frac{1}{239} &= 4\alpha - \frac{\pi}{4} \\
\arctan\frac{1}{239} + \frac{\pi}{4} &= 4\alpha \\
\pi &= 4\cdot\left[4\alpha - \arctan\frac{1}{239}\right] \\
\pi &= 4\cdot\left[4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}\right]
\end{aligned}$$

Arcustangens-Formel von Machin

- $\tan\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{239} \quad \Longrightarrow \quad \arctan\frac{1}{239} = 4\alpha - \frac{\pi}{4}$

$$
\begin{aligned}
\arctan\frac{1}{239} &= 4\alpha - \frac{\pi}{4} \\
\arctan\frac{1}{239} + \frac{\pi}{4} &= 4\alpha \\
\pi &= 4\cdot\left[4\alpha - \arctan\frac{1}{239}\right] \\
\pi &= 4\cdot\left[4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}\right]
\end{aligned}
$$

Hochleistungsalgorithmen

Durch die Entwicklung von Hochleistungsformeln, sowie die Entwicklung von Methoden zur schnellen Multiplikation und durch die Leistungsexplosion der Computer ist es möglich geworden, eine Billion Nachkommastellen von π zu berechnen. Der Wegbereiter war der indische Mathematiker Srinivasa Ramanujan, auf dessen Errungenschaften sich die Formeln der Gebrüder Chudnovsky und jene der Gebrüder Borwein stützen.

$$\pi = \frac{9801}{\sqrt{8}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103+26390n)}{(n!)^4 396^{4n}} \right)^{-1}$$

Ramanujan, 1914

Hochleistungsalgorithmen

Durch die Entwicklung von Hochleistungsformeln, sowie die Entwicklung von Methoden zur schnellen Multiplikation und durch die Leistungsexplosion der Computer ist es möglich geworden, eine Billion Nachkommastellen von π zu berechnen. Der Wegbereiter war der indische Mathematiker Srinivasa Ramanujan, auf dessen Errungenschaften sich die Formeln der Gebrüder Chudnovsky und jene der Gebrüder Borwein stützen.

$$\pi = \frac{9801}{\sqrt{8}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103+26390n)}{(n!)^4 396^{4n}} \right)^{-1}$$

Ramanujan, 1914

Hochleistungsalgorithmen

Reihenformel	exakte Dezimalen pro Schritt
Ramanujan, 1914	8
J. und P. Borwein, 1989	25
G. und D. Chudnovsky, 1994	14

Algorithmus	Vervielfachung exakter Dezimalen
Brent, Salamin, 1976	Verdoppelung
J. und P. Borwein, 1985	Vervierfachung

bisherige Berechnungsrekorde

Name	Jahr	exakte Dezimalen
Guilloud, Bouyer	1973	1 001 259
Gosper	1985	17 526 200
Bailey	1986	29 360 111
Chudnovsky	Aug. 1989	1 011 196 691
Kanada, Takahashi	Apr. 1999	68 719 470 000
Kanada	heute	1, 2 Billionen

- π ist **nicht rational**. Adrien Marie Legendre bewies 1794, dass π^2 irrational ist, und daher auch π.
- π ist **nicht mit Zirkel und Lineal darstellbar**. Äquivalent dazu kann man sagen: π ist nicht durch einen algebraischen Ausdruck, welcher Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division oder Quadratwurzelziehen beinhaltet, darstellbar.
- π ist nicht **algebraisch**. Das heißt, es gibt keine algebraische Gleichung der Form

$$a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 = 0$$

(n endlich, a_i rational, wobei $i = 1 \ldots n$), welche π als Nullstelle hat. Nicht algebraische Zahlen heißen *transzendent* .

- π ist **nicht rational**. Adrien Marie Legendre bewies 1794, dass π^2 irrational ist, und daher auch π.
- π ist **nicht mit Zirkel und Lineal darstellbar**. Äquivalent dazu kann man sagen: π ist nicht durch einen algebraischen Ausdruck, welcher Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division oder Quadratwurzelziehen beinhaltet, darstellbar.
- π ist nicht **algebraisch**. Das heißt, es gibt keine algebraische Gleichung der Form

$$a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 = 0$$

(n endlich, a_i rational, wobei $i = 1 \ldots n$), welche π als Nullstelle hat. Nicht algebraische Zahlen heißen *transzendent* .

- π ist **nicht rational**. Adrien Marie Legendre bewies 1794, dass π^2 irrational ist, und daher auch π.
- π ist **nicht mit Zirkel und Lineal darstellbar**. Äquivalent dazu kann man sagen: π ist nicht durch einen algebraischen Ausdruck, welcher Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division oder Quadratwurzelziehen beinhaltet, darstellbar.
- π ist nicht **algebraisch**. Das heißt, es gibt keine algebraische Gleichung der Form

$$a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 = 0$$

(n endlich, a_i rational, wobei $i = 1 \ldots n$), welche π als Nullstelle hat. Nicht algebraische Zahlen heißen *transzendent* .

Transzendenz

Die Lösung der Gleichung $X^2 - 2 = 0$ ist $\sqrt{2}$. Somit ist $\sqrt{2}$ algebraisch.

Auch Summen, Produkte und Quotienten algebraischer Zahlen algebraisch. Somit ist jede endliche Konstruktion, die von algebraischen Zahlen und Wurzelzeichen ausgeht, algebraisch und kann mit Zirkel und Lineal dargestellt werden.

Die Zahlen π und e gehören jedoch nicht zu dieser Zahlenmenge. Den Beweis der Transzendenz von π erbrachte 1882 Ferdinand Lindemann. Die Menge der transzendenten Zahlen ist überabzählbar.

Transzendenz

Die Lösung der Gleichung $X^2 - 2 = 0$ ist $\sqrt{2}$. Somit ist $\sqrt{2}$ algebraisch.

Auch Summen, Produkte und Quotienten algebraischer Zahlen algebraisch. Somit ist jede endliche Konstruktion, die von algebraischen Zahlen und Wurzelzeichen ausgeht, algebraisch und kann mit Zirkel und Lineal dargestellt werden.

Die Zahlen π und e gehören jedoch nicht zu dieser Zahlenmenge. Den Beweis der Transzendenz von π erbrachte 1882 Ferdinand Lindemann. Die Menge der transzendenten Zahlen ist überabzählbar.

Transzendenz

Die Lösung der Gleichung $X^2 - 2 = 0$ ist $\sqrt{2}$. Somit ist $\sqrt{2}$ algebraisch.

Auch Summen, Produkte und Quotienten algebraischer Zahlen algebraisch. Somit ist jede endliche Konstruktion, die von algebraischen Zahlen und Wurzelzeichen ausgeht, algebraisch und kann mit Zirkel und Lineal dargestellt werden.

Die Zahlen π und e gehören jedoch nicht zu dieser Zahlenmenge. Den Beweis der Transzendenz von π erbrachte 1882 Ferdinand Lindemann. Die Menge der transzendenten Zahlen ist überabzählbar.

Normalität

Bisher ist noch unbekannt, ob die Dezimalen von π irgendwelchen Regeln folgen. Das heißt, man weiß nicht, ob

- bestimmte Ziffern ab einer gewissen Stelle gar nicht mehr vorkommen, bzw. nur noch bestimmte Ziffern auftauchen,
- die Häufigkeit der Nullen gegen 100 Prozent geht, das heißt, die anderen Ziffern immer seltener vorkommen,
- sich ab einer gewissen Stelle eine Ziffernfolge sehr oft wiederholt (z. B. 1000 Mal), bevor eine Änderung eintritt,
- die Dezimalen von π irgendeinem anderen Prinzip gehorchen.

Es wird vermutet, dass π **normal** ist, d. h. ob die Ziffern 0 bis 9, aber auch alle Folgen aus beliebig vielen Ziffern (z. B. 000, 001, 002, . . . ,998, 999) statistisch gleich verteilt sind. Einen Beweis dafür gibt es jedoch noch nicht.

Normalität

Bisher ist noch unbekannt, ob die Dezimalen von π irgendwelchen Regeln folgen. Das heißt, man weiß nicht, ob

- bestimmte Ziffern ab einer gewissen Stelle gar nicht mehr vorkommen, bzw. nur noch bestimmte Ziffern auftauchen,
- die Häufigkeit der Nullen gegen 100 Prozent geht, das heißt, die anderen Ziffern immer seltener vorkommen,
- sich ab einer gewissen Stelle eine Ziffernfolge sehr oft wiederholt (z. B. 1000 Mal), bevor eine Änderung eintritt,
- die Dezimalen von π irgendeinem anderen Prinzip gehorchen.

Es wird vermutet, dass π **normal** ist, d. h. ob die Ziffern 0 bis 9, aber auch alle Folgen aus beliebig vielen Ziffern (z. B. 000, 001, 002, . . . ,998, 999) statistisch gleich verteilt sind. Einen Beweis dafür gibt es jedoch noch nicht.

- Edward Johnston Goodwin gelingt es 1897 beinahe, im Staat Indiana für π die Werte $\pi = 4$, $\pi = 3,1604$, $\pi = 3,2$ und $\pi = 2,32$ gesetzlich festzuankern.
- Der Versuch der Kreisquadratur beschäftigte die Menschheit so lange, dass das dringende Verlangen, den Kreis zu quadrieren einen medizinischen Fachausdruck erhielt. Die Krankheit heißt *Morbus cyclometricus* .
- Das Memorieren der Nachkommastellen von π ist zum Sport geworden. Der Weltrekord liegt momentan bei 100 000 Stellen (Akira Haraguchi).
- Laut Yasumasa Kanada wiederholt sich die Ziffernfolge 314159265358 an der 1 142 905 318 634-ten Nachkommastelle von π.

Literatur

- Delahaye, Jean-Paul: π *- Die Story* , Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser, 1999.
- Arndt, Jörg, Haenel, Christoph: π*. Algorithmen, Computer, Arithmetik* , Berlin, Heidelberg: Springer, 2000.
- Berggren, Lennart, Borwein, Jonathan, Borwein, Peter: π*: A Source Book* , New York, Berlin, Heidelberg: Springer, 1997.