Rund um π

Vortrag von Katharina Blaszczok
Im Proseminar Lehramt am 18.12.2006
Kontakt: katharina.blaszczok@gmx.de

Zusammenfassung: Die Geschichte der Kreiszahl, Berechnungsmethoden im Wandel der Zeit, π in verschiedenen mathematischen Zusammenhängen, Transzendenz und Normalität, Kurioses

1 Einleitung

1.1 Definitionen

1.1.1 π als Verhältnis „Umfang zu Durchmesser"

Die Kreiszahl $\pi = 3,1415926535\ldots$ hat ihren Ursprung in der Geometrie als die Konstante, die den Umfang eines Kreises mit dem Durchmesser $d = 1$ bezeichnet, d. h. je nach Umfanglänge wächst oder verringert sich der Radius proportional. Die erste Näherung geht einfach von $\pi = 3$ aus. Doch durch ihren praktischen Nutzen (Astronomie, Feldmessung, Architektur) war es immer von Interesse, diese Konstante möglichst genau zu ermitteln.
Mit zwei konzentrischen Kreisen und unter Anwendung des Strahlensatzes kann man beweisen, dass das Verhältnis $\frac{U}{2r}$ unabhängig von dem betrachteten Kreis und π damit eine Konstante ist. Dies ist aber nur in Räumen der Fall, in welchen ein Abstandsbegriff definiert ist (Euklidischer Raum). Unter der allgemeinen Annahme, dass unsere physikalische Welt euklidisch ist, ist die Kreiszahl π experimentell messbar. Aus der Relativitätstheorie von Einstein folgt jedoch, dass unser Raum jedoch nicht euklidisch ist. Deshalb ist π keine physikalische Konstante.

1.1.2 π als die Fläche eines Kreises mit Radius $r = 1$

Ein weiteres Verhältnis ist die Formel $\pi = \frac{A}{r^2}$. Anders ausgedrückt ist π das Verhältnis der Kreisfläche mit dem Radius r zu der Fläche des Quadrats mit Seitenlänge r.
Davon ausgehend kann man eine arithmetische Definition von π geben:

1. Man zeichne ein quadratisches Gitter aus $(2n+1) \times (2n+1)$ Punkten. Die Abstände zwischen den Punkten sollen gleichmäßig sein (d. h. er soll $\frac{1}{n}$ betragen). Jedem Punkt wird ein Zahlenpaar (x, y) zugeordnet.

2. Man zähle die Punkte, welche der Bedingung $x^2 + y^2 < n^2$ genügen. D. h. für (x, y) soll gelten: $-1 < \frac{x}{n}, \frac{y}{n} < 1$ und $\frac{x^2}{n^2} + \frac{y^2}{n^2} < 1$.

3. Man teile die Anzahl der gefundenen Punkte (k) durch die gesamte Anzahl der Punkte und multipliziere das Ergebnis mit 4.

Dann ist der Näherungswert:

$$p_n = \frac{k}{(2n+1)^2}4$$

Diese Definition stützt sich nicht mehr auf den dreidimensionalen Raum, sondern auf die Zeichenebene, die mit Sicherheit euklidisch ist. Somit beruht sie nicht auf einer physikalischen Hypothese, sondern ist präzise definiert. Allerdings muss man, um p Dezimalen zu berechnen, $n = 10^p$ wählen und etwa 10^{2p} Multiplikationen mit p-stelligen Zahlen, sowie Additionen und Vergleiche durchführen. Deshalb kommt man auch mit sehr leistungsstarken Rechnern nicht auf viele Dezimalen.

1.1.3 Weitere geometrische Definitonen

Weitere Zusammenhänge aus der Geometrie, in denen π auftaucht, sind:

- Volumen einer Kugel: $V = \frac{4\pi r^3}{3}$
  Für $r = 1$ gilt: $\pi = \frac{3}{4}V$
- Oberfläche einer Kugel: $O = 4\pi r^2$
  Für $r = 1$ gilt: $\pi = \frac{1}{4}O$

1.1.4 Eine elementare Approximation - die arithmetische Quadratur

Man geht erneut von der Definition $\pi = \frac{A}{r^2}$ aus. Dazu geht man wie folgt vor:

1. Man betrachtet nur den Viertelkreis des Einheitskreises im ersten Quadranten. Der Radius r wird in n Intervalle der Länge $\frac{r}{n}$ geteilt. Über diesen Intervallen konstruiert man Rechtecke, indem man den y-Wert an der rechten Intervallgrenze abträgt.

2. Die Höhe eines Rechtecks an der i-ten Stelle errechnet man mit dem Satz des Pythagoras, wobei der Radius r die Länge die Hypothenuse und $\frac{r}{n} \cdot i$ die Länge der Kathete darstellt. Es ergibt sich

$$y_i = \sqrt{r^2 - (i \cdot \frac{r}{n})^2}$$

$$y_i = \frac{r}{n} \cdot \sqrt{n^2 - i^2}$$

3. Die fläche des i-ten Quadrates beträgt

$$A_i = y_i \cdot \frac{r}{n}$$

4. Für die Fläche des Kreises gilt

$$A_n = 4 \cdot \frac{r}{n} \cdot \left(y_1 + y_2 + y_3 + \ldots\right)$$

$$A_n = 4 \cdot \frac{r}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$A_n = 4 \cdot \frac{r}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{r}{n} \sqrt{n^2 - i^2} \right)$$

$$A_n = 4 \cdot \frac{r^2}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sqrt{n^2 - i^2}$$

5. Für wachsendes n nähert sich der Ausdruck

$$\frac{4}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sqrt{n^2 - i^2}$$

dem Wert von π. Allerdings geht dieser Wert sehr langsam gegen π: Für 2048 Intervalle haben wir die Näherung

$$A_{2048} = r^2 \cdot 3.1406$$

Hier ist ein Fehler von etwa einem Tausendstel mal r^2.

2 Geschichte der Näherungen von π

π tritt in allen alten mathematischen Texten auf, die gefunden worden sind. Die meisten Völker wussten nichts über die Beschaffenheit dieser Zahl, sondern waren ihr in der Geometrie begegnet.

2.1 geometrische Methode nach Archimedes

In seinem Buch „Über Kreismessung“ formuliert Archimedes $(287 - 212$ v. Chr.) als Satz die Abschätzung

$$\frac{22}{7} < \pi < \frac{223}{71}$$

Es handelt sich um das erste Verfahren, das es theoretisch erlaubt, den Wert von π beliebig genau zu berechnen. Außerdem ist es nicht vom euklidischen Raum abhängig.
Das Verfahren lässt sich folgendermaßen beschreiben: Einem Kreis von Radius $r = 1$ wird ein regelmäßiges Polygon einbeschrieben und eines umbeschrieben. Durch Ausrechnen einer Seitenlänge ergibt sich der Umfang. In jedem folgenden Schritt wird die Seitenlänge halbiert. Die Umfänge beider Polygone schließen den Umfang des Kreises immer enger ein. Archimedes berechnet fünf solche Schritte. Sein Ergebnis zeigt, dass π zwischen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$, bzw. zwischen $3,1408\ldots$ und $3,1429\ldots$ liegen muss. Er berechnete π also auf ein Hundertstal genau: $\pi = 3,14\ldots$. Da die Polygone irgendwann mit dem Kreis „verschmelzen“ und ihn somit „ausschöpfen“, nennt man diese Methode auch „Exhaustionsprinzip“ (lat.: exhaurire - ausschöpfen).

Auf diesem Verfahren von Archimedes basierten lange Zeit alle Methoden, durch die neue Stellen ausgerechnet wurden.

2.2 π als unendliches Produkt nach Vieta

Nach einem ganz ähnlichen Prinzip wie funktioniert auch das Produkt von Vieta. Ausgehend von einbeschriebenen Polygonen gibt er 1593 als erster ein unendliches Produkt als Näherung für π an.

- Es seien s_n die Seitenlänge und u_n der Umfang eines regelmäßigen, dem Einheitskreis einbeschriebenen $2 \cdot 2^n$-Ecks. Für den Umfang des Polygons gilt dann:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} u_n = \pi$$

- Man kann zeigen, dass für die Seitenlänge s_{2n} gilt:

$$s_{2n} = \sqrt{2 - \ F_n^2}$$

- Man kann zeigen, dass für die Seitenlänge einer Seite s_{2n} gilt: $s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}} r_{2n}$
- Dann sehen die Umfänge der Polygone wie folgt aus:

$$\begin{array}{lll} \text{„Zweieck“:} & u_0 & = 2 \cdot 2 \\ \text{Quadrat:} & u_1 & = 4 \cdot \sqrt{2} \\ \text{Achteck:} & u_2 & = 8 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} \\ \text{16-Eck:} & u_3 & = 16 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \end{array}$$

Da der Umfang für $n \longrightarrow \infty$ aus einer immer größer werdenden Zweierpotenz und einem immer kleiner werdendem Wurzelausdruck besteht, führt dies bei der Berechnung durch einen Computer zu Auslöschungseffekten.

- Betrachtet man den Quotienten aus zwei aufeinanderfolgenden Umfängen, stellt man fest:

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$
$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$
$$\frac{u_3}{u_2} = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

- Das Produkt dieser Quotienten lautet:

$$u_0 \prod_{k=1}^{n} \frac{u_k}{u_{k-1}} = u_0 \cdot \frac{u_1}{u_0} \cdot \frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{u_3}{u_2} \cdot \ldots \cdot \frac{u_n}{u_{n-1}} = u_n$$

- Das Unendliche Produkt von Vieta ergibt sich nun, wenn man dieses Produkt gegen unendlich streben läßt:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(u_0\prod_{k=1}^{n}\frac{u_k}{u_{k-1}}\right) &= \pi \\
\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdot\ldots &= \pi \\
\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\ldots &= \tfrac{2}{\pi}
\end{aligned}$$

  Diese Schreibweise für π vermeidet bei Berechnung mittels Computer den Auslöschungseffekt.

Das Verfahren läßt sich auch auf ein Polygon mit $3\cdot 2^n$ Seiten übertragen.
Vieta hat sich nicht um die Konvergenz des Verfahrens bemüht. Alle drei Schritte gewinnt man fünf neue Ziffern, was für die Praxis nicht brauchbar ist. 1665 wurde das Produkt von Vieta von Wallis (1616 – 1703) verbessert.

2.3 Arcustangensfunktionen

Die Berechnung neuer Dezimalen von π durch Arcustangensformeln war ein erheblicher Fortschritt. Diese Entwicklung kann man in folgende Etappen einteilen:

- Isaac Newton (1642 – 1727) und Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) legen unabhängig voneinander die Differential- und Integralrechnung vor.
- James Gregory (1638 – 1675) entdeckt (gleichzeitig mit Leibniz), dass die Fläche unter der Kurve des Graphen von $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ zwischen 0 und x den Wert $\arctan(x)$ besitzt.
- Unter der Verwendung der geometrischen Reihe gilt:

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-(-x^2)}=\sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k=1-x^2+x^4-x^6+x^8-+\ldots$$

- Mithilfe der Differential- und Integralrechnung ergibt sich:

$$\begin{aligned}
(\arctan x)' &= 1-x^2+x^4-x^6+x^8-+\ldots \\
\arctan x &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}
\end{aligned}$$

- Da $\tan(\frac{\pi}{4})=1$, gibt die Umkehrfunktion $\arctan 1=\frac{\pi}{4}$ wieder, und es gilt:

$$\arctan 1=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{\pi}{4}$$

Diese Reihe konvergiert noch sehr langsam gegen $\frac{\pi}{4}$. Man erhält drei genaue Stellen erst nach 50 Summengliedern. Die Konvergenz der Reihe verbessert sich aber, wenn man für x Werte wählt, die zwischen 0 und 1 liegen.

2.4 Arcustangensreihe von Machin

John Machin (1680 – 1752) entdeckte 1706 eine Formel, die wesentlich schneller ist. Wir wissen, dass die Gregory-Reihe für $x = 1$ gegen den Wert $\frac{\pi}{4}$ geht. Um die Konvergenz zu beschleunigen, müsste man einen Wert zwischen 0 und 1 wählen. Dann geht die Reihe allerdings nicht mehr gegen $\frac{\pi}{4}$. Gesucht ist also eine Formel, die garantiert, dass die Arcustangensreihe für ein bestimmtes x gegen π (oder ein Bruchteil davon) geht.

- Es wird ein Wert für α gesucht, so dass $\tan 4\alpha \approx 1$ ist. Da $\tan \pi = 0$, muss gelten: $\alpha < \frac{\pi}{4}$. Das heißt, $4\alpha < \pi$.
- Um einen Wert für 4α zu erhalten, wird das folgende Additionstheorem verwendet:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

- Man wählt $\tan \alpha = \frac{1}{5}$.

$$\begin{aligned} \tan 2\alpha &= \tan(\alpha + \alpha) = \frac{2 \cdot \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12} \\ \tan 4\alpha &= \tan(2\alpha + 2\alpha) = \frac{2 \cdot \tan 2\alpha}{1 - \tan^2 2\alpha} = \frac{2 \cdot \frac{5}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119} \end{aligned}$$

- Man sieht: Der Wert für $\tan 4\alpha$ ist um $\frac{1}{119}$ größer als 1.

$$\tan(4\alpha - \tfrac{\pi}{4}) = \frac{\tan 4\alpha - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan 4\alpha \cdot \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\tan 4\alpha - 1}{1 + \tan 4\alpha \cdot 1} = \frac{\frac{1}{119}}{\frac{239}{119}} = \frac{1}{239}$$

- Es folgt:

$$\begin{aligned} \tan\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{239} \\ \arctan\left(\frac{1}{239}\right) &= 4\alpha - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

- Löst man die letzte Gleichung nach π auf und setzt $\alpha = \arctan(\frac{1}{5})$, erhält man die Formel von John Machin:

$$\pi = 4 \cdot \left[4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)\right]$$

John Machin berechnete mit dieser Formel als erster 100 Dezimalstellen von π. Das Verfahren konvergiert schnell, da die Arcustangenswerte sehr klein sind.

2.5 Computerberechnung

Srinivasa Ramanujan: Indischer Mathematiker, schrieb zahlreiche Formeln auf, die höchst erstaunlich sind, welche er jedoch nicht bewies. Er starb im Alter von 30 Jahren an Tuberkulose. Seine Formel, durch die man mit jedem zusätzlichen Glied acht neue Dezimalstellen erhält, war ein Meilenstein für die Berechnung von π:

$$\pi = \frac{9801}{\sqrt{8}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103 + 26390n)}{(n!)^4 396^{4n}} \right)^{-1}$$

Nach den ersten Berechnungen mit sog. „Büromaschinen“ lieferte der auf den Namen „ENIAC“ (Electronic Numerical Integrator and Calculator) getaufte erste elektronische Rechner im Jahre 1949 2047 Dezimalen. Er brauchte für diese Berechnung 70 Stunden. Danach wurden bis 1973, als Jean Guilloud und Martine Bouyer die erste Million Dezimalen erreichten, regelmäßig Rekorde aufgestellt. Es wurden fast ausschließlich Arcustangensformeln verwendet.
Durch neue Verfahren zur schnellen Multiplikation großer Zahlen, zur schnellen Division und zum schnellen Wurzelziehen ist es gelungen, heute eine Billion Stellen zu berechen. (Quelle: Internet, Freunde der Zahl π)

3 Transzendenz, Normalität

3.1 Transzendenz

Die Zahl π ist nicht endlich definierbar. Das heißt, sie ist weder als Verhältnis zweier ganzer Zahlen darstellbar, d. h. rational, noch lässt sich nicht mit Zirkel und Lineal konstruieren, noch kann man sie als Nullstelle einer algebraischen Gleichung mit endlich vielen Operationen darstellen.

Die Bezeichnung für eine Zahl, 'endlich definierbar' zu sein, hatte in der Geschichte der Mathematik verschiedene Bedeutungen. So waren die Pythagoreer der Ansicht, alle Zahlen ließen sich mit Brüchen beschreiben. Heute bedeutet endlich definierbar

- rational zu sein
- mit Zirkel und Lineal konstruierbar sein
- algebraisch zu sein

Definition:

Eine Zahl ist dann und nur dann rational, wenn ihre Dezimalbruchentwicklung (oder ihre Entwicklung zu einer beliebigen anderen Basis) von einer bestimmten Stelle an periodisch ist.

Rationale Zahlen reichen nicht aus, um π darzustellen.
Dazu seien p und $q \in \mathbb{N}$ teilerfremd. Wir teilen p durch q. Ab einer gewissen Zahl der

Divisionsschritte kommt man immer wieder auf denselben Zwischenrest. Alle Reste sind kleiner als q. Es gibt nur endlich viele Zahlen die kleiner sind als q. Von der Stelle an, von der sich die Zahlen wiederholen, wiederholen sich auch die Rechnungen. Ist die Dezimalbruchentwicklung einer rationalen Zahl also unendlich, ist sie notwendigerweise von einer gewissen Stelle an periodisch und ihre Periode ist kleiner als q.

Beispiel:

$$4,36972972972972\ldots \;=\; \frac{436}{100}+\frac{972}{100000}\left[1+\frac{1}{1000^1}+\frac{1}{1000^2}+\frac{1}{1000^3}+\ldots\right]$$

Dabei entspricht der Ausdruck in der Klammer der geometr. Reihe (mit $q=\frac{1}{1000}<1$):

$$1+\frac{1}{1000^1}+\frac{1}{1000^2}+\frac{1}{1000^3}+\ldots \;=\; 1+\left(\frac{1}{1000}\right)^1+\left(\frac{1}{1000}\right)^2+\left(\frac{1}{1000}\right)^3+\ldots \;=\; \frac{1}{(1-\frac{1}{1000})}$$

Auf diese Weise lassen sich irrationale Zahlen konstruieren: Die Dezimalen dieser Zahlen dürfen nicht periodisch wiederkehren.

$$b=0,101001000100001000000\ldots$$

Da aber niemals eine Periode in π gefunden worden ist, ist die Zahl irrational. Adrien Marie Legendre (1752-1833) zog den Schluss, dass π^2 irrational ist und damit auch $\sqrt{\pi^2}$. Der Beweis selbst ist nicht so einfach wie derjenige der Irrationalität von $\sqrt{2}$. Bis heute ist noch unbekannt, ob $e+\pi$, $e\pi$ und $\frac{e}{\pi}$ rational sind.

Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal ist bei π ebenso nicht gegeben. Die Kreiszahl gehört nicht zu den Größen, die mit Hilfe einer endlichen Anzahl der elementaren Operationen der Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und des Quadratwurzelziehens, definierbar sind.
Dabei sind die geometrische Auffassung (Benutzung von Zirkel und Lineal) und die algebraische Auffassung (Verwendung von Quadratwurzeln) äquivalent. Die Formulierung des Problems lautet nun: „Man finde einen algebraischen Ausdruck gegebenenfalls unter Verwendung von Quadratwurzeln, der exakt π ergibt.“
Pierre Laurent Wantzel gab 1837 den Beweis dafür, dass dies unmöglich ist. Er bewies außerdem noch die Unmöglichkeit der Verdoppelung des Würfels, was gleichbedeutend ist mit „Man finde einen endlichen algebraischen Ausdruck für $\sqrt[3]{2}$ mit Hilfe von Quadratwurzeln“, sowie die Unmöglichkeit der Dreiteilung des Winkels („Man finde einen endlichen algebraischen Ausdruck für $\sin\frac{x}{3}$ unter Verwendung von Quadratwurzeln und $\sin x$“).

Definition:

Eine Zahl ist dann und nur dann algebraisch, wenn sie Lösung einer Gleichung mit rationalen Koeffizienten ist. Zahlen, die nicht algebraisch sind, heißen *transzendent*.

Beispiel:

Die Lösung der Gleichung

$$X^2 - 2 \quad = 0$$

ist $\sqrt{2}$. Somit ist $\sqrt{2}$ algebraisch.

Aber auch Summen, Produkte und Quotienten algebraischer Zahlen algebraisch. Daher ist jede endliche Konstruktion, die von algebraischen Zahlen und Wurzelzeichen ausgeht, algebraisch, wie beispielsweise Zahlen, welche einer Gleichung der Form $X^5 + 2\sqrt{2}X + 3X^3 + 4X^4 - \sqrt{2} = 0$ genügen.

1844 zeigte Joseph Liouville (1809-1882) in einem Artikel, den er 1852 veröffentlichte, dass es zu einer irrationalen Zahl x, welche die Lösung einer algebraischen Gleichung n-ten Grades ist, eine Konstante $C > 0$ derart gibt, dass jede rationale Zahl $\frac{p}{q}$ der Ungleichung $|x - \frac{p}{q}| \geq \frac{C}{q^n}$ genügt.
Das heißt, dass die Differenz zwischen irrationaler und rationaler Zahl stets größer bzw. gleich ist, als ein bestimmter „Fehler", der mit C definiert ist. Das heißt wiederum, dass man eine irrationale Zahl sehr schlecht durch eine rationale approximieren kann.

Negiert man diese Aussage, so folgt, dass jede irrationale Zahl, die sich **gut** durch rationale Zahlen annähern lässt, transzendent sein muss. Als Beispiel nehme man:

Liouvillsche Zahl

$$c = \sum_{j=1}^{\infty} 10^{-j!} = 0.110001000000000000000001000\ldots$$

Der Exponent $-j!$ bedeutet, dass an die Stelle $j!$ nach dem Komma, also an die Stellen $1, 2, 6, 24, 120, \ldots$ die Ziffer 1 gesetzt wird. Alle Liouvillschen Zahlen sind transzendent, aber nicht alle transzendenten Zahlen sind Loiuvillsche Zahlen. Auch π kann man nicht als Liouvillesche Zahl darstellen.
Auch die durch folgende Reihen definierten Zahlen gehören zu den transzendenten Zahlen. Man kann so unendlich viele transzendente Zahlen konstruieren.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n^{n!}} \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n^n}} \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n + 5^{n!}}$$

Sämtliche Zahlen, denen man natürlicherweise begegnet, sind algebraisch. Allerdings gibt es unendlich viel mehr transzendente Zahlen als algebraische. Warum begegnet man ihnen dann nicht entsprechend häufig?
Georg Cantor (1845-1918) gab ein anderes Verfahren zur Erzeugung transzendenter Zahlen an.

Satz:
Es gibt transzendente Zahlen.

Beweis:
Man ordne jeder algebraischen Gleichung ein Gewicht zu, indem man die Beträge ihrer Koeffizienten und ihren Grad addiert.

Beispiel:

$$\begin{aligned} 3X^5 - 7X + 1 \quad &= 0 \\ 3 + 7 + 1 + 5 \quad &= 16 \end{aligned}$$

Zu einer festen ganzen Zahl $n = 1, 2, 3, \ldots$ gibt es nur eine endliche Anzahl algebraischer Gleichungen mit dem Gewicht n, denn sie müssen alle einen Grad $\leq n$ besitzen, und die Summe der Beträge der Koeffizienten muss ebenfalls $\leq n$ sein. Für die Grade $n = 1, 2$ sieht das wie folgt aus:

$n = 1$

$$\begin{aligned} 1 &= 0 \\ -1 &= 0 \end{aligned}$$

$n = 2$

$$\begin{aligned} 2 &= 0 \\ -2 &= 0 \\ X &= 0 \\ -X &= 0 \end{aligned}$$

So lassen sich alle Gleichungen durchnummerieren. Da eine Gleichung n-ten Grades höchstens n Lösungen hat, kann man auch diese anordnen, indem man die Lösungen der ersten Gleichung (falls diese überhaupt Lösungen hat) durchnummeriert, dann die Lösungen der zweiten Gleichung usw.
Somit erhalten wir eine Liste aller möglichen algebraischen Zahlen $(s_1, s_2, s_3, s_4 \ldots)$. Somit wird deutlich: Die Menge der algebraischen Zahlen ist abzählbar ist.

Nun wird das Cantorsche Diagonalverfahren auf die Menge der reellen Zahlen angewendet und gezeigt, dass diese Menge unabzählbar ist.
Die Menge der reellen Zahlen ist jedoch nicht abzählbar. Man sieht dies, wenn man nun eine transzendente Zahle konstruiert: Sei r eine reelle Zahl der Form $r = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$

Wähle für a_1 eine Ziffer, die sich von der ersten Nachkommastelle von s_1 unterscheidet.
Wähle für a_2 eine Ziffer, die sich von der zweiten Nachkommastelle von s_2 unterscheidet.

Wähle für a_3 eine Ziffer, die sich von der dritten Nachkommastelle von s_3 unterscheidet. usw.

Beispiel:

Wähle $a_i = 3$, falls die entsprechende Nachkommastelle von s_i ungleich 3 ist,
wähle $a_i = 4$, falls die entsprechende Nachkommastelle von s_i gleich 3 ist.
Man sollte nicht die Ziffern 0 und 9 verwenden, um Komplikationen zu vermeiden ($1 = 0,99999\ldots$).
Es ergibt sich eine Zahl der Form

$$r \quad = 0,33333433333333433433333333433333333334\ldots$$

Es handelt sich um eine beliebig konstruierte reelle Zahl, die sich jedoch an jeweils einer bestimmten Stelle von einer der Lösungen $s_0, s_1, s_2, \ldots$ unterscheidet. Sie kann also nicht zufällig eine Lösung einer algebraischen Gleichung sein.

Weil man bei der Wahl der Ziffern (im Beispiel 3 und 4) die Wahl aus 8 Ziffern hat, und diese Zahlen nicht durchgängig beibehalten muss, sondern ändern kann, lassen sich mit dieser Vorschrift unabzählbar viele reelle Zahlen konstruieren, die aufgrund ihrer Beschaffenheit nicht algebraisch, also transzendent sind. Da es unabzählbar viele sind, kann man sagen, dass die Menge der reellen Zahlen größer ist als die der algebraischen Zahlen. Anders ausgedrückt: Die algebraischen Zahlen kommen im Vergleich zu den transzendenten Zahlen unendlich seltener vor.

Algebraisch ist π ebenfalls nicht. Niels Henrik Abel bewies 1824, dass gewisse Gleichungen von höherem als viertem Grade nicht durch Wurzelausdrücke lösbar sind. Évariste Galois vervollständigte diese Feststellung dadurch, dass er eine Charakterisierung der Polynomgleichungen gab, die durch Wurzelausdrücke lösbar sind und schuf so die Gruppentheorie.

Die Zahlen π und e gehören zu der Menge der transzendenten Zahlen, sind also nicht algebraisch. Den Beweis der Transzendenz von π erbrachte 1882 Ferdinand Lindemann.

3.2 Normalität

Es ist bisher immer noch unbekannt, ob es in der Folge der Dezimalen von π irgendwelche Regeln gibt. Das heißt, man weiß nicht, ob

- π ab einer gewissen, noch unbekannten Stelle periodisch ist,
- bestimmte Ziffern oder Ziffernblöcke statistisch häufiger auftauchen als andere,
- bestimmte Ziffern ab einer gewissen Stelle gar nicht mehr vorkommen, bzw. nur noch bestimmte Ziffern auftauchen,
- beispielsweise ab einer bestimmten Stelle nur noch Blöcke aus der Zahlenfolge 0123456789 vorkommen,

- die Häufigkeit der Nullen gegen 100 Prozent geht, das heißt, die anderen Ziffern immer seltener vorkommen,
- die Ziffernfolge mit ...010011100001111100000... aufhört,
- sich ab einer gewissen Stelle eine Ziffernfolge sehr oft wiederholt (z. B. 1000 Mal), bevor eine Änderung eintritt,
- die Dezimalen von π irgendeinem anderen Prinzip gehorchen.

Bei den Dezimalen von π handelt es sich um eine statistisch beliebige, komplexe, unvorhersehbare, nichtkomprimierbare (usw.) Folge. Man vermutet, dass π eine „normale" Zahl ist, dass heißt, dass nicht nur jede Ziffer von 0 bis 9 gleich verteilt ist, sondern auch jede Folge aus den Blöcken 00 bis 99, jede Folge aus den Blöcken 000 bis 999 und jede andere Folge aus beliebig vielen Ziffern. Dies hat man bisher noch nicht bewiesen.
Man wird niemals mehr als 10^{77} Stellen von π berechnen können (jetzt: $5x10^10$), auch wenn man dafür die gesamten Resourcen nutzen würde. Das liegt an Beschränkungen, die mit der Physik unserer Welt zu tun haben (Größe der Elektronen, Größe des sichtbaren Universums, Lichtgeschwindigkeit).
Tests (Berechnungsrekorde, Prüfung verschiedener Theorien) führen zu der Annahme, dass die Dezimalzahlen von π sich so verhalten, wie eine Folge aus zufällig gewürfelter Zahlen.
Aber:

- Alle Beweise und Ergebnisse deuten aber darauf hin, dass π vollständig determiniert ist. (Also nicht „zufällig" im Sinne von „unbestimmt".) Nur aus dem Beweis, dass π keine Liouvillesche Zahl ist, folgt, dass Folgen von Nullen in den Dezimalen von π nicht sehr lang sein können.
- π ist nicht in jedem Darstellungssystem zufällig. Für die Basen 2 und 16 hat man eine Formel entdeckt, die besondere Eigenschaften der Entwicklung von π zu den Basen 2 und 16 zeigte. Diese Entwicklung kann man Stelle für Stelle ausrechnen. Außerdem können alle unendlichen Reihenformeln als regelmäßige Entwicklungen von π angesehen werden. Zu der variablen Basis [1/3, 2/5, 3/7, ...] lässt sich π einfach als 2,22222... schreiben.

4 Kurioses über π

- 1897 unterbreitet Edward Johnston Goodwin im Staat Indiana (USA) dem Parlament den Vorschlag, π per Gesetz auf die Werte $\pi = 4$, $\pi = 3,1604$, $\pi = 3,2$ und $\pi = 2,32$ festzulegen.
- Im 18. Jahrhundert veröffentlichte die „Königliche Akademie der Wissenschaften zu Paris" den Beschluss, keine Lösungen der Probleme der Quadratur des Kreises mehr zu überprüfen. Das Krankheitsbild derjenigen, die den Kreis unbedingt quadrieren wollen, wird *Morbus cyclometricus* genannt.
- Es gibt zahlreiche Texte und Gedichte, die das Merken der Dezimalen von π erleichtern sollen durch verschiedene Kodierungen der Ziffern. Das bekannteste Gedicht ist „Near a raven" von Edgar Allan Poe.