# Nullstellen reeller Polynome

**Christiane Sutter**

Proseminar für Lehramt

27.11.2006

# Überblick

- Beschreibung von Lösungswegen für das Lösen reeller Polynome bis zum Grad 4
- Kurze Erläuterung der Problematik der Nullstellenbestimmung bei Polynomen mit Grad $> 4 \Longrightarrow$ Satz von Abel-Ruffini; Idee von Galois
- Einige Hinweise, wie die Lage von Nullstellen abgeschätzt werden kann und näherungsweise Bestimmung von Nullstellen in der Praxis

# Überblick

- Beschreibung von Lösungswegen für das Lösen reeller Polynome bis zum Grad 4
- Kurze Erläuterung der Problematik der Nullstellenbestimmung bei Polynomen mit Grad $> 4 \Longrightarrow$ Satz von Abel-Ruffini; Idee von Galois
- Einige Hinweise, wie die Lage von Nullstellen abgeschätzt werden kann und näherungsweise Bestimmung von Nullstellen in der Praxis

# Überblick

- Beschreibung von Lösungswegen für das Lösen reeller Polynome bis zum Grad 4
- Kurze Erläuterung der Problematik der Nullstellenbestimmung bei Polynomen mit Grad $> 4 \Longrightarrow$ Satz von Abel-Ruffini; Idee von Galois
- Einige Hinweise, wie die Lage von Nullstellen abgeschätzt werden kann und näherungsweise Bestimmung von Nullstellen in der Praxis

# Was sind reelle Polynome?

In der linearen Algebra definiert man **Polynome** als finite Folgen (d.h. alle bis auf endlich viele $a_i$ sind gleich Null).

Für unsere folgenden Betrachtungen genügt jedoch:

**Definition**

$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt **Polynom vom Grad** $n \in \mathbb{N}_0$ falls $\forall a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C} : a_n \neq 0 \wedge \forall x \in \mathbb{C} :$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

# Was sind reelle Polynome?

In der linearen Algebra definiert man **Polynome** als finite Folgen (d.h. alle bis auf endlich viele $a_i$ sind gleich Null).

Für unsere folgenden Betrachtungen genügt jedoch:

**Definition**

$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt **Polynom vom Grad** $n \in \mathbb{N}_0$ falls
$\forall a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C} : a_n \neq 0 \wedge \forall x \in \mathbb{C} :$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

# Was sind reelle Polynome?

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Dabei

- bestimmt der höchste Exponent $n$ den **Polynomgrad** von $p$.
- bezeichnet man die Zahlen $a_0, ..., a_n$ als die **Koeffizienten** von $p$.
- nennen wir $p$ **normiert**, falls der Leitkoeffizient $a_n = 1$ ist.

Polynome sind **"reell"**, wenn die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ sind.

**Achtung!** Polynome mit reellen Koeffizienten können auch komplexe Nullstellen haben.

# Was sind reelle Polynome?

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Dabei
- bestimmt der höchste Exponent $n$ den **Polynomgrad** von $p$.
- bezeichnet man die Zahlen $a_0, ..., a_n$ als die **Koeffizienten** von $p$.
- nennen wir $p$ **normiert**, falls der Leitkoeffizient $a_n = 1$ ist.

Polynome sind **"reell"**, wenn die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ sind.

**Achtung!** Polynome mit reellen Koeffizienten können auch komplexe Nullstellen haben.

# Was sind reelle Polynome?

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Dabei

- bestimmt der höchste Exponent $n$ den **Polynomgrad** von $p$.
- bezeichnet man die Zahlen $a_0, ..., a_n$ als die **Koeffizienten** von $p$.
- nennen wir $p$ **normiert**, falls der Leitkoeffizient $a_n = 1$ ist.

Polynome sind **"reell"**, wenn die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ sind.

**Achtung!** Polynome mit reellen Koeffizienten können auch komplexe Nullstellen haben.

# Was sind reelle Polynome?

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Dabei
- bestimmt der höchste Exponent $n$ den **Polynomgrad** von $p$.
- bezeichnet man die Zahlen $a_0, ..., a_n$ als die **Koeffizienten** von $p$.
- nennen wir $p$ **normiert**, falls der Leitkoeffizient $a_n = 1$ ist.

Polynome sind **"reell"**, wenn die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ sind.

**Achtung!** Polynome mit reellen Koeffizienten können auch komplexe Nullstellen haben.

# Was sind reelle Polynome?

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Dabei
- bestimmt der höchste Exponent $n$ den **Polynomgrad** von $p$.
- bezeichnet man die Zahlen $a_0, ..., a_n$ als die **Koeffizienten** von $p$.
- nennen wir $p$ **normiert**, falls der Leitkoeffizient $a_n = 1$ ist.

Polynome sind **"reell"**, wenn die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ sind.
**Achtung!** Polynome mit reellen Koeffizienten können auch komplexe Nullstellen haben.

# Fundamentalsatz der Algebra

**Hauptsatz der Algebra:**

Sei $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$: Ist
$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ ein komplexes Polynom vom Grad $n$, so gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ (die Nullstellen des Polynoms), so dass
$p(x) = a_n(x - x_n)(x - x_{n-1}) \ldots (x - x_2)(x - x_1)$ gilt.

Die **Anzahl der Nullstellen**, wenn sie mit der richtigen Vielfachheit gezählt werden, ist also insgesamt gleich dem Grad des Polynoms.

# Fundamentalsatz der Algebra

**Hauptsatz der Algebra:**

Sei $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$: Ist $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ ein komplexes Polynom vom Grad $n$, so gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ (die Nullstellen des Polynoms), so dass $p(x) = a_n(x - x_n)(x - x_{n-1}) \ldots (x - x_2)(x - x_1)$ gilt.

Die **Anzahl der Nullstellen**, wenn sie mit der richtigen Vielfachheit gezählt werden, ist also insgesamt gleich dem Grad des Polynoms.

# Was ist eine Nullstelle?

**Definition**

Ein Element $x_0 \in \mathbb{C}$ eines Polynoms $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt **Nullstelle** von $p$, wenn $p(x_0) = 0$ gilt.

Nach dem Hauptsatz der Algebra sind die Zahlen $x_1,\ldots,x_n$ die Nullstellen eines Polynoms.
Von **einfacher Nullstelle** spricht man, wenn $x_i$ nur einmal in den Linearfaktoren $(x - x_i)$ auftritt. Eine **mehrfache (k-fache) Nullstelle** in $x_i \in \mathbb{C}$ liegt vor, wenn der Linearfaktor $(x - x_i)$ k-mal auftritt.

# Was ist eine Nullstelle?

**Definition**

Ein Element $x_0 \in \mathbb{C}$ eines Polynoms $p \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt **Nullstelle** von $p$, wenn $p(x_0) = 0$ gilt.

Nach dem Hauptsatz der Algebra sind die Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ die Nullstellen eines Polynoms.
Von **einfacher Nullstelle** spricht man, wenn $x_i$ nur einmal in den Linearfaktoren $(x - x_i)$ auftritt. Eine **mehrfache (k-fache) Nullstelle** in $x_i \in \mathbb{C}$ liegt vor, wenn der Linearfaktor $(x - x_i)$ k-mal auftritt.

# Was ist eine Nullstelle?

Bei Polynomen mit reellen Koeffizienten treten echt komplexe Nullstellen stets als Paare komplex konjugierter Zahlen auf. Das heißt, ist $\lambda = x + iy$ eine Nullstelle, so auch $\bar{\lambda} = x - iy$.

- Polynome geraden bzw. ungeraden Grades haben also stets gerade bzw. ungerade viele reelle Nullstellen, wenn man jede Nullstelle entsprechend ihrer Vielfachheit zählt.
- Polynome ungeraden Grades über den reellen Zahlen haben stets mindestens eine reelle Nullstelle.

# Was ist eine Nullstelle?

Bei Polynomen mit reellen Koeffizienten treten echt komplexe Nullstellen stets als Paare komplex konjugierter Zahlen auf. Das heißt, ist $\lambda = x + iy$ eine Nullstelle, so auch $\bar{\lambda} = x - iy$.

- Polynome geraden bzw. ungeraden Grades haben also stets gerade bzw. ungerade viele reelle Nullstellen, wenn man jede Nullstelle entsprechend ihrer Vielfachheit zählt.
- Polynome ungeraden Grades über den reellen Zahlen haben stets mindestens eine reelle Nullstelle.

# Was ist eine Nullstelle?

Bei Polynomen mit reellen Koeffizienten treten echt komplexe Nullstellen stets als Paare komplex konjugierter Zahlen auf. Das heißt, ist $\lambda = x + iy$ eine Nullstelle, so auch $\bar{\lambda} = x - iy$.

- Polynome geraden bzw. ungeraden Grades haben also stets gerade bzw. ungerade viele reelle Nullstellen, wenn man jede Nullstelle entsprechend ihrer Vielfachheit zählt.
- Polynome ungeraden Grades über den reellen Zahlen haben stets mindestens eine reelle Nullstelle.

# Existenz von Nullstellen

Mit dem **Zwischenwertsatz** kann abgeschätzt werden, ob sich zwischen zwei Stellen a und b einer stetigen Funktion eine Nullstelle existiert:

**Zwischenwertsatz von Bolzano:**

Sei $p : \mathbb{R} \supset [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und $\gamma \in \mathbb{R}$ mit $min\,\{f(x) : a \leq x \leq b\} \leq \gamma \leq max\,\{f(x) : a \leq x \leq b\}$. Dann gibt es (mindestens) ein $\hat{x} \in [a, b]$ mit $f(\hat{x}) = \gamma$.

Haben f(a) und f(b) verschiedene Vorzeichen, so garantiert der Zwischenwertsatz die Existenz einer Nullstelle von f im offenen Intervall (a,b).

# Polynome mit Grad $n \leq 4$

Die Nullstellen von Polynomen ersten, zweiten, dritten und vierten Grades lassen sich mit Formeln explizit berechnen.
Dagegen lassen sich Polynome höheren Grades nur in Spezialfällen exakt faktorisieren.

Hier soll nun also zunächst auf die 'einfachen' Fälle eingegangen werden.

# Lösung linearer Polynome

Lineare Polynome sind Polynome der Form $p(x) = ax + b$. Es soll $p(x) = 0$ sein. Daraus ergibt sich für $x$ die Lösung:

$$\boxed{\mathbb{L} := \left\{ x \in \mathbb{R} | x = -\frac{b}{a} \right\}, a, b \in \mathbb{R}}$$

Geometrische Beschreibung linearer Polynome bei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Gerade, die die x-Achse in EINEM Punkt schneidet.

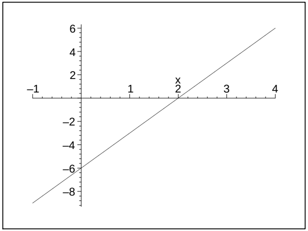



Abbildung: 3x - 6

# Lösung linearer Polynome

Lineare Polynome sind Polynome der Form $p(x) = ax + b$. Es soll $p(x) = 0$ sein. Daraus ergibt sich für $x$ die Lösung:

$$\boxed{\mathbb{L} := \left\{ x \in \mathbb{R} | x = -\frac{b}{a} \right\}, a, b \in \mathbb{R}}$$

Geometrische Beschreibung linearer Polynome bei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Gerade, die die x-Achse in EINEM Punkt schneidet.

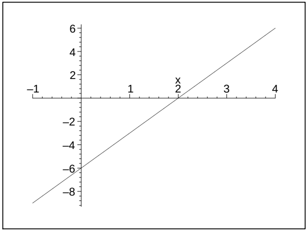



Abbildung: 3x - 6

# Quadratische Polynome

Zur Lösung einer **quadratischen Gleichung** ($p(x) = ax^2 + bx + c = 0$) kann man folgende Lösungsformel (**"Mitternachtsformel"**) benutzen:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Für den Spezialfall eines normierten quadratischen Polynoms (d.h. $a = 1 \rightarrow p(x) = x^2 + px + q$) ergibt sich die sog. **"p-q-Formel"**:

$$\boxed{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}$$

Jede quadratische Gleichung kann durch geeignete Äquivalenzumformungen in die Normalform gebracht werden $\rightarrow p = \frac{b}{a}$, $q = \frac{c}{a}$

# Quadratische Polynome

Zur Lösung einer **quadratischen Gleichung** ($p(x) = ax^2 + bx + c = 0$) kann man folgende Lösungsformel (**"Mitternachtsformel"**) benutzen:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Für den Spezialfall eines normierten quadratischen Polynoms (d.h. $a = 1 \rightarrow p(x) = x^2 + px + q$) ergibt sich die sog. **"p-q-Formel"**:

$$\boxed{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}$$

Jede quadratische Gleichung kann durch geeignete Äquivalenzumformungen in die Normalform gebracht werden $\rightarrow p = \frac{b}{a}$, $q = \frac{c}{a}$

# Quadratische Polynome

Zur Lösung einer **quadratischen Gleichung** ($p(x) = ax^2 + bx + c = 0$) kann man folgende Lösungsformel (**"Mitternachtsformel"**) benutzen:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Für den Spezialfall eines normierten quadratischen Polynoms (d.h. $a = 1 \rightarrow p(x) = x^2 + px + q$) ergibt sich die sog. **"p-q-Formel"**:

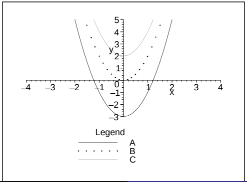
$$\boxed{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}$$

Jede quadratische Gleichung kann durch geeignete Äquivalenzumformungen in die Normalform gebracht werden $\rightarrow p = \frac{b}{a}$, $q = \frac{c}{a}$

# Anzahl der Lösungen quadratischer Gleichungen

Der Ausdruck unter der Wurzel (die **Diskriminante** $D = b^2 - 4ac$) bestimmt für eine Gleichung mit reellen Koeffizienten, wie viele reellwertige Lösungen die Gleichung hat. Man unterscheidet drei Fälle:

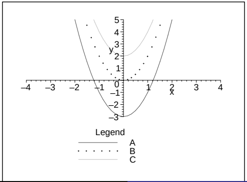
1. $D > 0$: Die Parabel (A) hat zwei Schnittpunkte mit der x-Achse, es gibt also zwei verschiedene reelle Nullstellen $x_1$ und $x_2$,
2. $D = 0$: Die Parabel (B) hat einen Berührpunkt mit der x-Achse, es ist $x_1 = x_2$ (**doppelte Nullstelle**). Der Berührpunkt ist gleichzeitig auch ein Maximum ($a < 0$) bzw. Minimum ($a > 0$)
3. $D < 0$, Die Parabel (C) hat keinen Schnittpunkt mit der x-Achse, es gibt keine reelle Lösung der quadratischen Gleichung, wohl aber komplexe.



# Anzahl der Lösungen quadratischer Gleichungen

Der Ausdruck unter der Wurzel (die **Diskriminante** $D = b^2 - 4ac$) bestimmt für eine Gleichung mit reellen Koeffizienten, wie viele reellwertige Lösungen die Gleichung hat. Man unterscheidet drei Fälle:

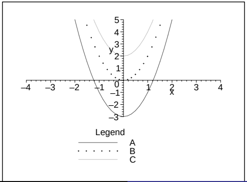
1. $D > 0$: Die Parabel (A) hat zwei Schnittpunkte mit der x-Achse, es gibt also zwei verschiedene reelle Nullstellen $x_1$ und $x_2$,
2. $D = 0$: Die Parabel (B) hat einen Berührpunkt mit der x-Achse, es ist $x_1 = x_2$ (**doppelte Nullstelle**). Der Berührpunkt ist gleichzeitig auch ein Maximum ($a < 0$) bzw. Minimum ($a > 0$)
3. $D < 0$, Die Parabel (C) hat keinen Schnittpunkt mit der x-Achse, es gibt keine reelle Lösung der quadratischen Gleichung, wohl aber komplexe.



# Anzahl der Lösungen quadratischer Gleichungen

Der Ausdruck unter der Wurzel (die **Diskriminante** $D = b^2 - 4ac$) bestimmt für eine Gleichung mit reellen Koeffizienten, wie viele reellwertige Lösungen die Gleichung hat. Man unterscheidet drei Fälle:

1. $D > 0$: Die Parabel (A) hat zwei Schnittpunkte mit der x-Achse, es gibt also zwei verschiedene reelle Nullstellen $x_1$ und $x_2$,
2. $D = 0$: Die Parabel (B) hat einen Berührpunkt mit der x-Achse, es ist $x_1 = x_2$ (**doppelte Nullstelle**). Der Berührpunkt ist gleichzeitig auch ein Maximum ($a < 0$) bzw. Minimum ($a > 0$)
3. $D < 0$, Die Parabel (C) hat keinen Schnittpunkt mit der x-Achse, es gibt keine reelle Lösung der quadratischen Gleichung, wohl aber komplexe.



# Herleitung der Formeln

Zur Herleitung der Lösungsformeln benutzt man die **Quadratische Ergänzung**:

$$\begin{array}{rcl|ll}
x^2 + p \cdot x + q & = & 0 & -q & \\
x^2 + p \cdot x & = & -q & + \left(\frac{p}{2}\right)^2 & \text{Quadrat der Hälfte des lin. Gliedes add.} \\
x^2 + p \cdot + \left(\frac{p}{2}\right)^2 & = & \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q & () & \text{Mit binom. Formel zusammenfassen} \\
\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 & = & \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q & \sqrt{} & \text{Wurzel ziehen} \\
x + \frac{p}{2} & = & \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} & &
\end{array}$$

Auf die Mitternachtsformel kommt man von hier, indem man $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$ verwendet:

$$\begin{array}{rcl|l}
x_{1,2} & = & -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} & \text{p, q ersetzen durch s.o.} \\
& = & -\frac{1}{2}\frac{b}{a} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\frac{b^2}{a^2} - \frac{c}{a}} & \frac{1}{2a} \text{ ausklammern} \\
& = & \frac{1}{2a} \cdot (-b) \pm \sqrt{\frac{1}{4a^2}(b^2 - 4ac)} & \text{auf einen Bruchstrich schreiben} \\
& = & \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} &
\end{array}$$

# Herleitung der Formeln

Zur Herleitung der Lösungsformeln benutzt man die **Quadratische Ergänzung**:

$$
\begin{array}{rcc|cl}
x^2 + p \cdot x + q & = & 0 & -q & \\
x^2 + p \cdot x & = & -q & + \left(\frac{p}{2}\right)^2 & \text{Quadrat der Hälfte des lin. Gliedes add.} \\
x^2 + p \cdot + \left(\frac{p}{2}\right)^2 & = & \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q & () & \text{Mit binom. Formel zusammenfassen} \\
\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 & = & \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q & \sqrt{} & \text{Wurzel ziehen} \\
x + \frac{p}{2} & = & \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} & &
\end{array}
$$

Auf die Mitternachtsformel kommt man von hier, indem man $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$ verwendet:

$$
\begin{array}{rcc|l}
x_{1,2} & = & -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} & \text{p, q ersetzen durch s.o.} \\
 & = & -\frac{1}{2}\frac{b}{a} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\frac{b^2}{a^2} - \frac{c}{a}} & \frac{1}{2a} \text{ ausklammern} \\
 & = & \frac{1}{2a} \cdot (-b) \pm \sqrt{\frac{1}{4a^2}(b^2 - 4ac)} & \text{auf einen Bruchstrich schreiben} \\
 & = & \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} &
\end{array}
$$

# Herleitung der Formeln

Zur Herleitung der Lösungsformeln benutzt man die **Quadratische Ergänzung**:

$$
\begin{array}{rcl|ll}
x^2 + p \cdot x + q & = & 0 & -q & \\
x^2 + p \cdot x & = & -q & + \left(\frac{p}{2}\right)^2 & \text{Quadrat der Hälfte des lin. Gliedes add.} \\
x^2 + p \cdot + \left(\frac{p}{2}\right)^2 & = & \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q & () & \text{Mit binom. Formel zusammenfassen} \\
\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 & = & \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q & \sqrt{} & \text{Wurzel ziehen} \\
x + \frac{p}{2} & = & \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} & &
\end{array}
$$

Auf die Mitternachtsformel kommt man von hier, indem man $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$ verwendet:

$$
\begin{array}{rcl|l}
x_{1,2} & = & -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} & \text{p, q ersetzen durch s.o.} \\
 & = & -\frac{1}{2}\frac{b}{a} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\frac{b^2}{a^2} - \frac{c}{a}} & \frac{1}{2a} \text{ ausklammern} \\
 & = & \frac{1}{2a} \cdot (-b) \pm \sqrt{\frac{1}{4a^2}(b^2 - 4ac)} & \text{auf einen Bruchstrich schreiben} \\
 & = & \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} &
\end{array}
$$

# Herleitung der Formeln

Zur Herleitung der Lösungsformeln benutzt man die **Quadratische Ergänzung**:

$$
\begin{array}{rcl|cl}
x^2 + p \cdot x + q & = & 0 & -q & \\
x^2 + p \cdot x & = & -q & + \left(\frac{p}{2}\right)^2 & \text{Quadrat der Hälfte des lin. Gliedes add.} \\
x^2 + p \cdot + \left(\frac{p}{2}\right)^2 & = & \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q & () & \text{Mit binom. Formel zusammenfassen} \\
\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 & = & \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q & \surd & \text{Wurzel ziehen} \\
x + \frac{p}{2} & = & \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} & &
\end{array}
$$

Auf die Mitternachtsformel kommt man von hier, indem man $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$ verwendet:

$$
\begin{array}{rcl|l}
x_{1,2} & = & -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} & \text{p, q ersetzen durch s.o.} \\
 & = & -\frac{1}{2}\frac{b}{a} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\frac{b^2}{a^2} - \frac{c}{a}} & \frac{1}{2a} \text{ ausklammern} \\
 & = & \frac{1}{2a} \cdot (-b) \pm \sqrt{\frac{1}{4a^2}(b^2 - 4ac)} & \text{auf einen Bruchstrich schreiben} \\
 & = & \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} &
\end{array}
$$

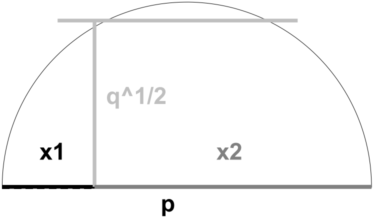
# Geometrische Lösung mit Satz von Vieta

Quadratische Gleichungen besitzen eine wichtige Eigenschaft:

$$x_1 + x_2 = -p \text{ und } x_1 x_2 = q$$

Man bezeichnet dies als die **Satzgruppe von Vieta** nach der latinisierten Form von François Viète, einem franz. Mathematiker (1540 - 1603).

Diese Eigenschaft kann man nutzen, um die Lösung quadratischer Gleichungen geometrisch zu bestimmmen. Für den Fall $0 \leq q \leq \left(\frac{p}{2}\right)$ gilt nämlich mit Hilfe des Höhensatzes:



# Geometrische Lösung mit Satz von Vieta

Quadratische Gleichungen besitzen eine wichtige Eigenschaft:

$$x_1 + x_2 = -p \text{ und } x_1 x_2 = q$$

Man bezeichnet dies als die **Satzgruppe von Vieta** nach der latinisierten Form von François Viète, einem franz. Mathematiker (1540 - 1603).

Diese Eigenschaft kann man nutzen, um die Lösung quadratischer Gleichungen geometrisch zu bestimmmen. Für den Fall $0 \leq q \leq \left(\frac{p}{2}\right)$ gilt nämlich mit Hilfe des Höhensatzes:

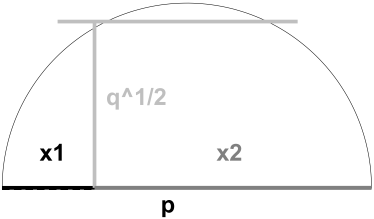



Abbildung: Lösungen nach Satz von Vieta

# Geometrische Lösung mit Satz von Vieta

Quadratische Gleichungen besitzen eine wichtige Eigenschaft:

$$x_1 + x_2 = -p \text{ und } x_1 x_2 = q$$

Man bezeichnet dies als die **Satzgruppe von Vieta** nach der latinisierten Form von François Viète, einem franz. Mathematiker (1540 - 1603).

Diese Eigenschaft kann man nutzen, um die Lösung quadratischer Gleichungen geometrisch zu bestimmmen. Für den Fall $0 \leq q \leq \left(\frac{p}{2}\right)$ gilt nämlich mit Hilfe des Höhensatzes:

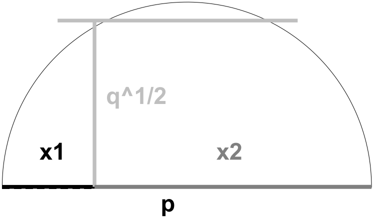



Abbildung: Lösungen nach Satz von Vieta

# Kubische Polynome

Kubische Polynome sind Polynome dritten Grades.

Geometrisch beschreibt die reelle Variante der kubischen Gleichung eine kubische Parabel in der x-y-Ebene, die immer von $-\infty \ldots + \infty \, (a > 0)$ bzw. von $+\infty \ldots - \infty \, (a < 0)$ läuft.
Deshalb muss es stets mindestens einen Schnittpunkt mit der x-Achse geben, d.h. mindestens eine reelle Nullstelle.

Lösungsformeln zu kubischen Polynomen wurden erstmals 1545 von **Girolamo Cardano (1501-1576)** in seinem Buch *Ars magna* veröffentlicht.

# Kubische Polynome

Kubische Polynome sind Polynome dritten Grades.

Geometrisch beschreibt die reelle Variante der kubischen Gleichung eine kubische Parabel in der x-y-Ebene, die immer von $-\infty \ldots + \infty \, (a > 0)$ bzw. von $+\infty \ldots - \infty \, (a < 0)$ läuft.
Deshalb muss es stets mindestens einen Schnittpunkt mit der x-Achse geben, d.h. mindestens eine reelle Nullstelle.

Lösungsformeln zu kubischen Polynomen wurden erstmals 1545 von **Girolamo Cardano (1501-1576)** in seinem Buch *Ars magna* veröffentlicht.

# Kubische Polynome

Kubische Polynome sind Polynome dritten Grades.

Geometrisch beschreibt die reelle Variante der kubischen Gleichung eine kubische Parabel in der x-y-Ebene, die immer von $-\infty \ldots + \infty \, (a > 0)$ bzw. von $+\infty \ldots - \infty \, (a < 0)$ läuft.
Deshalb muss es stets mindestens einen Schnittpunkt mit der x-Achse geben, d.h. mindestens eine reelle Nullstelle.

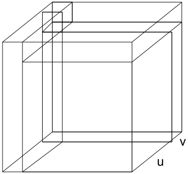
Lösungsformeln zu kubischen Polynomen wurden erstmals 1545 von **Girolamo Cardano (1501-1576)** in seinem Buch *Ars magna* veröffentlicht.

# Lösung reduzierter kubischer Polynome

Die Lösung der kubischen Gleichung stützt sich auf die kubische Binomialformel

$$(u+v)^3 = 3uv(u+v) + (u^3+v^3),$$

die Cardano mit geometrischen Mitteln herleiten konnte.




Die Gleichung kann interpretiert werden als kubische Gleichung $x^3 + px + q = 0$, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} u+v &= x \\ 3uv &= -p \\ u^3+v^3 &= -q \end{aligned}$$

# Lösung reduzierter kubischer Polynome

Damit die genannte Gleichung gelöst werden kann, sind also geeignete Größen $u$ und $v$ zu finden.

Da wir sowohl das Produkt als auch die Summe der beiden Größen $u^3$ und $v^3$ kennen, können wir sie mithilfe des Satzes von Vieta als die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung

$$w^2 + qw - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

berechnen.

Zur Verdeutlichung:

$$\begin{array}{rcl|rcl}
x_1 + x_2 & = & -p & u^3 + v^3 & = & -q \\
x_1 x_2 & = & q & u^3 v^3 & = & (-p/3)^3 \\
x^2 + p\,x + q & = & 0 & 0 & = & w^2 + q\,w - (p/3)^3
\end{array}$$

# Lösung reduzierter kubischer Polynome

Damit die genannte Gleichung gelöst werden kann, sind also geeignete Größen $u$ und $v$ zu finden.
Da wir sowohl das Produkt als auch die Summe der beiden Größen $u^3$ und $v^3$ kennen, können wir sie mithilfe des Satzes von Vieta als die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung

$$w^2 + qw - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

berechnen.

Zur Verdeutlichung:

$$\begin{array}{rcl|rcl} x_1 + x_2 & = & \text{-p} & u^3 + v^3 & = & \text{-q} \\ x_1 x_2 & = & \text{q} & u^3 v^3 & = & \text{(-p/3)}^3 \\ x^2 + \text{p}\, x + \text{q} & = & 0 & 0 & = & w^2 + \text{q}\, w \text{ - (p/3)}^3 \end{array}$$

# Lösung reduzierter kubischer Polynome

Damit die genannte Gleichung gelöst werden kann, sind also geeignete Größen $u$ und $v$ zu finden.
Da wir sowohl das Produkt als auch die Summe der beiden Größen $u^3$ und $v^3$ kennen, können wir sie mithilfe des Satzes von Vieta als die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung

$$w^2 + qw - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

berechnen.

Zur Verdeutlichung:

$$\begin{array}{rcl|rcl} x_1 + x_2 & = & \text{-p} & u^3 + v^3 & = & \text{-q} \\ x_1 x_2 & = & \text{q} & u^3 v^3 & = & \text{(-p/3)}^3 \\ x^2 + \text{p}\, x + \text{q} & = & 0 & 0 & = & w^2 + \text{q}\, w \text{ - (p/3)}^3 \end{array}$$

# Lösung reduzierter kubischer Polynome

Dies führt mit der p-q-Formel zu den beiden Werten:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \text{ und } v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Für die gesuchte Lösung $x = u + v$ der kubischen Gleichung

$x^3 + px + q = 0$ erhält man die so genannte **Cardanosche Formel**

$$\boxed{x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}}$$

# Lösung reduzierter kubischer Polynome

Dies führt mit der p-q-Formel zu den beiden Werten:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \text{ und } v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Für die gesuchte Lösung $x = u + v$ der kubischen Gleichung

$x^3 + px + q = 0$ erhält man die so genannte **Cardanosche Formel**

$$\boxed{x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}}$$

# Cardanos Lösungsweg für den allgemeinen kubischen Fall

Wie aber löst man nun den **allgemeinen** Fall $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$?

Cardano löste das Problem, indem er ein allgemein anwendbares Verfahren benutzte, um das quadratische Glied zu eliminieren.

Zunächst wird zur gesuchten Lösung $x$ der Summand $a/3$ addiert:

$$x^3 + ax^2 = x^3 + ax^2 + \frac{a^2}{3} + \frac{a^3}{27} - \frac{a^2}{3}x - \frac{a^3}{27} = \left(x + \frac{a}{3}\right)^3 - \frac{a^2}{3}x - \frac{1}{27}a^3$$

$$= \left(x + \frac{a}{3}\right)^3 - \frac{a^2}{3}\left(x + \frac{a}{3}\right) + \frac{2}{27}a^3$$

Anschließend **Substitution** der Unbekannten $x$ innerhalb der gesamten Gleichung durch $x = y - \frac{a}{3}$

# Cardanos Lösungsweg für den allgemeinen kubischen Fall

Wie aber löst man nun den **allgemeinen** Fall $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$?

Cardano löste das Problem, indem er ein allgemein anwendbares Verfahren benutzte, um das quadratische Glied zu eliminieren.

Zunächst wird zur gesuchten Lösung $x$ der Summand $a/3$ addiert:

$$x^3 + ax^2 = x^3 + ax^2 + \frac{a^2}{3} + \frac{a^3}{27} - \frac{a^2}{3}x - \frac{a^3}{27} = \left(x + \frac{a}{3}\right)^3 - \frac{a^2}{3}x - \frac{1}{27}a^3$$

$$= \left(x + \frac{a}{3}\right)^3 - \frac{a^2}{3}\left(x + \frac{a}{3}\right) + \frac{2}{27}a^3$$

Anschließend **Substitution** der Unbekannten $x$ innerhalb der gesamten Gleichung durch $x = y - \frac{a}{3}$

# Cardanos Lösungsweg für den allgemeinen kubischen Fall

Wie aber löst man nun den **allgemeinen** Fall $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$?

Cardano löste das Problem, indem er ein allgemein anwendbares Verfahren benutzte, um das quadratische Glied zu eliminieren.

Zunächst wird zur gesuchten Lösung $x$ der Summand $a/3$ addiert:

$$x^3 + ax^2 = x^3 + ax^2 + \frac{a^2}{3} + \frac{a^3}{27} - \frac{a^2}{3}x - \frac{a^3}{27} = \left(x + \frac{a}{3}\right)^3 - \frac{a^2}{3}x - \frac{1}{27}a^3$$

$$= \left(x + \frac{a}{3}\right)^3 - \frac{a^2}{3}\left(x + \frac{a}{3}\right) + \frac{2}{27}a^3$$

Anschließend **Substitution** der Unbekannten $x$ innerhalb der gesamten Gleichung durch $x = y - \frac{a}{3}$

# Cardanos Lösungsweg für den allgemeinen kubischen Fall

Wie aber löst man nun den **allgemeinen** Fall $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$?

Cardano löste das Problem, indem er ein allgemein anwendbares Verfahren benutzte, um das quadratische Glied zu eliminieren.

Zunächst wird zur gesuchten Lösung $x$ der Summand $a/3$ addiert:

$$x^3 + ax^2 = x^3 + ax^2 + \frac{a^2}{3} + \frac{a^3}{27} - \frac{a^2}{3}x - \frac{a^3}{27} = \left(x + \frac{a}{3}\right)^3 - \frac{a^2}{3}x - \frac{1}{27}a^3$$

$$= \left(x + \frac{a}{3}\right)^3 - \frac{a^2}{3}\left(x + \frac{a}{3}\right) + \frac{2}{27}a^3$$

Anschließend **Substitution** der Unbekannten $x$ innerhalb der gesamten Gleichung durch $x = y - \frac{a}{3}$

# Cardanos Lösungsweg für den allgemeinen kubischen Fall

Nachdem man die Terme nach Potenzen von y sortiert hat, erhält man die Identität

$$x^3 + ax^2 + bx + c = y^3 + py + q$$

mit $p = -\frac{1}{3}a^2 + b$ und $q = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c$

Die Lösung für $y$ erhält man mittels der Cardanoschen Formel. Die urspüngliche Gleichung kann dann mit der Transformation x = y - a/3 gelöst werden.

Im allgemeinen Fall ergibt sich also:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{\frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c}{2} + \sqrt{\left(\frac{\frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\frac{1}{3}a^2 + b}{3}\right)^3}}$$

$$+ \sqrt[3]{-\frac{\frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c}{2} - \sqrt{\left(\frac{\frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\frac{1}{3}a^2 + b}{3}\right)^3}} - \frac{a}{3}$$

# Cardanos Lösungsweg für den allgemeinen kubischen Fall

Nachdem man die Terme nach Potenzen von y sortiert hat, erhält man die Identität

$$x^3 + ax^2 + bx + c = y^3 + py + q$$

mit $p = -\frac{1}{3}a^2 + b$ und $q = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c$
Die Lösung für $y$ erhält man mittels der Cardanoschen Formel. Die urspüngliche Gleichung kann dann mit der Transformation x = y - a/3 gelöst werden.
Im allgemeinen Fall ergibt sich also:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{\frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c}{2} + \sqrt{\left(\frac{\frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\frac{1}{3}a^2 + b}{3}\right)^3}}$$

$$+\sqrt[3]{-\frac{\frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c}{2} - \sqrt{\left(\frac{\frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\frac{1}{3}a^2 + b}{3}\right)^3}} - \frac{a}{3}$$

# Cardanos Lösungsweg für den allgemeinen kubischen Fall

Nachdem man die Terme nach Potenzen von y sortiert hat, erhält man die Identität

$$x^3 + ax^2 + bx + c = y^3 + py + q$$

mit $p = -\frac{1}{3}a^2 + b$ und $q = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c$
Die Lösung für $y$ erhält man mittels der Cardanoschen Formel. Die urspüngliche Gleichung kann dann mit der Transformation x = y - a/3 gelöst werden.
Im allgemeinen Fall ergibt sich also:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{\frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c}{2} + \sqrt{\left(\frac{\frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\frac{1}{3}a^2 + b}{3}\right)^3}}$$

$$+\sqrt[3]{-\frac{\frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c}{2} - \sqrt{\left(\frac{\frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\frac{1}{3}a^2 + b}{3}\right)^3}} - \frac{a}{3}$$

# Art der Lösungen kubischer Gleichungen

In Abhängigkeit vom Vorzeichen der Diskriminante $D = 4p^3 + 27q^2$ hat das kubische Polynom $x^3 + px + q$ für

- $D > 0$ eine reelle und zwei komplexe Nullstellen (A)
- $D < 0$ drei reelle Nullstellen (B).
- $D = 0$ eine dreifache reelle Nullstelle falls $p = q = 0$ (C) eine zweifache und eine einfache reelle Nullstelle falls $4p^3 = -27p^2 \neq 0$ (D)

# Art der Lösungen kubischer Gleichungen

In Abhängigkeit vom Vorzeichen der Diskriminante $D = 4p^3 + 27q^2$ hat das kubische Polynom $x^3 + px + q$ für

- $D > 0$ eine reelle und zwei komplexe Nullstellen (A)
- $D < 0$ drei reelle Nullstellen (B).
- $D = 0$ eine dreifache reelle Nullstelle falls $p = q = 0$ (C) eine zweifache und eine einfache reelle Nullstelle falls $4p^3 = -27p^2 \neq 0$ (D)

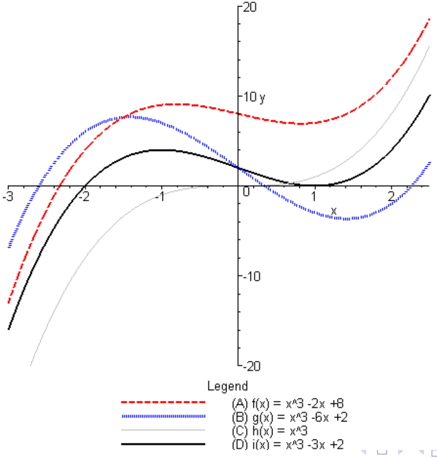
# Art der Lösungen kubischer Gleichungen

In Abhängigkeit vom Vorzeichen der Diskriminante $D = 4p^3 + 27q^2$ hat das kubische Polynom $x^3 + px + q$ für

- $D > 0$ eine reelle und zwei komplexe Nullstellen (A)
- $D < 0$ drei reelle Nullstellen (B).
- $D = 0$ eine dreifache reelle Nullstelle falls $p = q = 0$ (C) eine zweifache und eine einfache reelle Nullstelle falls $4p^3 = -27p^2 \neq 0$ (D)

# Art der Lösungen kubischer Gleichungen

(A) $D > 0$ eine reelle und 2 kompl. NS; (B) $D < 0$ drei reelle NS; (C) $D = 0$ eine 3-fache reelle NS falls $p = q = 0$ oder (D) eine 2-fache und eine 1-fache reelle NS falls $4p^3 = -27q^2 \neq 0$,



# Casus irreducibilis

Ein besonderer Fall ist $D < 0$: Bei der Bestimmung der drei reellen Lösungen mit der obigen Formel muss mit "negativen Wurzeln" gerechnet werden. Deshalb wird dieser Fall casus irreducibilis genannt. Als Cardano diese Rechnung ausführte, war das sozusagen die Geburtsstunde der komplexen Zahlen.

# Quartische u. biquadratische Gleichungen

**Quartische Gleichungen:**
Eine polynomiale Gleichung 4. Grades (auch **quartische Gleichung** genannt) hat die Form:

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0.$$

**Biquadratische Gleichungen:**
Ist $B = 0$ und $D = 0$, dann lässt sich die Gleichung durch Substitution auf eine quadratische Gleichung zurückführen. Diese Spezialform wird manchmal in Lehrbüchern als **biquadratische Gleichung** bezeichnet.

Aber: Man findet diese Bezeichnung oft auch für die allgemeine Form der Gleichung 4. Grades! Dies ist darauf zurückzuführen, dass sich mit Hilfe des Fundamentalsatzes der Algebra alle quartischen Gleichungen als Produkt zweier quadratischer Terme schreiben lassen.

# Quartische u. biquadratische Gleichungen

**Quartische Gleichungen:**
Eine polynomiale Gleichung 4. Grades (auch **quartische Gleichung** genannt) hat die Form:

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0.$$

**Biquadratische Gleichungen:**
Ist $B = 0$ und $D = 0$, dann lässt sich die Gleichung durch Substitution auf eine quadratische Gleichung zurückführen. Diese Spezialform wird manchmal in Lehrbüchern als **biquadratische Gleichung** bezeichnet.

Aber: Man findet diese Bezeichnung oft auch für die allgemeine Form der Gleichung 4. Grades! Dies ist darauf zurückzuführen, dass sich mit Hilfe des Fundamentalsatzes der Algebra alle quartischen Gleichungen als Produkt zweier quadratischer Terme schreiben lassen.

# Quartische u. biquadratische Gleichungen

**Quartische Gleichungen:**
Eine polynomiale Gleichung 4. Grades (auch **quartische Gleichung** genannt) hat die Form:

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0.$$

**Biquadratische Gleichungen:**
Ist $B = 0$ und $D = 0$, dann lässt sich die Gleichung durch Substitution auf eine quadratische Gleichung zurückführen. Diese Spezialform wird manchmal in Lehrbüchern als **biquadratische Gleichung** bezeichnet.

Aber: Man findet diese Bezeichnung oft auch für die allgemeine Form der Gleichung 4. Grades! Dies ist darauf zurückzuführen, dass sich mit Hilfe des Fundamentalsatzes der Algebra alle quartischen Gleichungen als Produkt zweier quadratischer Terme schreiben lassen.

# Lösung der reduzierten Form quart. Gleichungen

Außer für Gleichungen dritten Grades veröffentlichte Cardano in seiner *Ars magna* auch eine allgemeine Lösungsformel für Gleichungen vierten Grades. Er hat sich dabei des Wissens seines Schülers Ludovico Ferrari (1522-1569) bedient.

Quartische Gleichungen der Form

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

lassen sich so umformen, dass auf beiden Seiten ein Quadrat entsteht. Man addiert dazu unter Verwendung eines noch geeignet auszuwählenden Wertes z auf beiden Seiten der Gleichung $2zx^2 + z^2$ und erhält dadurch

$$x^4 + 2zx^2 + z^2 = (2z - p)x^2 - qx + (z^2 - r).$$

Auf der linken Seite haben wir bereits: $(x^2 + z)^2$. Wie muss $p$ auf der rechts gewählt werden?

$$2\sqrt{2z - p}\sqrt{z^2 - r} = -q$$

# Lösung der reduzierten Form quart. Gleichungen

Außer für Gleichungen dritten Grades veröffentlichte Cardano in seiner *Ars magna* auch eine allgemeine Lösungsformel für Gleichungen vierten Grades. Er hat sich dabei des Wissens seines Schülers Ludovico Ferrari (1522-1569) bedient.
Quartische Gleichungen der Form

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

lassen sich so umformen, dass auf beiden Seiten ein Quadrat entsteht.
Man addiert dazu unter Verwendung eines noch geeignet auszuwählenden Wertes z auf beiden Seiten der Gleichung $2zx^2 + z^2$ und erhält dadurch

$$x^4 + 2zx^2 + z^2 = (2z - p)x^2 - qx + (z^2 - r).$$

Auf der linken Seite haben wir bereits: $(x^2 + z)^2$. Wie muss $p$ auf der rechts gewählt werden?

$$2\sqrt{2z - p}\sqrt{z^2 - r} = -q$$

# Lösung der reduzierten Form quart. Gleichungen

Außer für Gleichungen dritten Grades veröffentlichte Cardano in seiner *Ars magna* auch eine allgemeine Lösungsformel für Gleichungen vierten Grades. Er hat sich dabei des Wissens seines Schülers Ludovico Ferrari (1522-1569) bedient.
Quartische Gleichungen der Form

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

lassen sich so umformen, dass auf beiden Seiten ein Quadrat entsteht. Man addiert dazu unter Verwendung eines noch geeignet auszuwählenden Wertes z auf beiden Seiten der Gleichung $2zx^2 + z^2$ und erhält dadurch

$$x^4 + 2zx^2 + z^2 = (2z - p)x^2 - qx + (z^2 - r).$$

Auf der linken Seite haben wir bereits: $(x^2 + z)^2$. Wie muss $p$ auf der rechts gewählt werden?

$$2\sqrt{2z - p}\sqrt{z^2 - r} = -q$$

# Lösung der reduzierten Form quart. Gleichungen

Außer für Gleichungen dritten Grades veröffentlichte Cardano in seiner *Ars magna* auch eine allgemeine Lösungsformel für Gleichungen vierten Grades. Er hat sich dabei des Wissens seines Schülers Ludovico Ferrari (1522-1569) bedient.
Quartische Gleichungen der Form

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

lassen sich so umformen, dass auf beiden Seiten ein Quadrat entsteht. Man addiert dazu unter Verwendung eines noch geeignet auszuwählenden Wertes z auf beiden Seiten der Gleichung $2zx^2 + z^2$ und erhält dadurch

$$x^4 + 2zx^2 + z^2 = (2z - p)x^2 - qx + (z^2 - r).$$

Auf der linken Seite haben wir bereits: $(x^2 + z)^2$. Wie muss $p$ auf der rechts gewählt werden?

$$2\sqrt{2z - p}\sqrt{z^2 - r} = -q$$

# Lösung der reduzierten Form quart. Gleichungen

Außer für Gleichungen dritten Grades veröffentlichte Cardano in seiner *Ars magna* auch eine allgemeine Lösungsformel für Gleichungen vierten Grades. Er hat sich dabei des Wissens seines Schülers Ludovico Ferrari (1522-1569) bedient.
Quartische Gleichungen der Form

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

lassen sich so umformen, dass auf beiden Seiten ein Quadrat entsteht. Man addiert dazu unter Verwendung eines noch geeignet auszuwählenden Wertes z auf beiden Seiten der Gleichung $2zx^2 + z^2$ und erhält dadurch

$$x^4 + 2zx^2 + z^2 = (2z - p)x^2 - qx + (z^2 - r).$$

Auf der linken Seite haben wir bereits: $(x^2 + z)^2$. Wie muss $p$ auf der rechts gewählt werden?

$$2\sqrt{2z - p}\sqrt{z^2 - r} = -q$$

# Lösung der reduzierten Form quart. Gleichungen

Durch beidseitiges Quadrieren, Ausmultiplizieren und Umformen dieser Bedingung erhält man schließlich eine kubische Gleichung der Form

$$z^3 - \frac{p}{2}z^2 - rz + \frac{pr}{2} - \frac{q^2}{8} = 0,$$

mit der durch die Cardanosche Formel bestimmbare Lösung z.

$z =$
$\sqrt[3]{\frac{1}{216}p^3 - \frac{1}{6}pr + \frac{1}{16}q^2 + \frac{1}{144}\sqrt{-48p^4r + 12p^3q^2 + 384p^2r^2 - 432prq^2 + 81q^4 - 768r^3}}+$
$\sqrt[3]{\frac{1}{216}p^3 - \frac{1}{6}pr + \frac{1}{16}q^2 - \frac{1}{144}\sqrt{-48p^4r + 12p^3q^2 + 384p^2r^2 - 432prq^2 + 81q^4 - 768r^3}}+$
$\frac{1}{6}p$

Lösungen für x erhält man, wenn man die zu beidseitigen Quadraten umgeformte Gleichung verwendet:

$$(x^2 + z)^2 = (2z - p)x^2 + (z^2 - r)$$

Beidseitiges Wurzelziehen und Umformen führt zu der quadratischen Gleichung

$$x^2 \pm \left(\sqrt{2z - p}x + \sqrt{z^2 - r}\right) + z = 0$$

# Lösung der reduzierten Form quart. Gleichungen

Durch beidseitiges Quadrieren, Ausmultiplizieren und Umformen dieser Bedingung erhält man schließlich eine kubische Gleichung der Form

$$z^3 - \frac{p}{2}z^2 - rz + \frac{pr}{2} - \frac{q^2}{8} = 0,$$

mit der durch die Cardanosche Formel bestimmbare Lösung z.

$z =$
$\sqrt[3]{\frac{1}{216}p^3 - \frac{1}{6}pr + \frac{1}{16}q^2 + \frac{1}{144}\sqrt{-48p^4r + 12p^3q^2 + 384p^2r^2 - 432prq^2 + 81q^4 - 768r^3}} +$
$\sqrt[3]{\frac{1}{216}p^3 - \frac{1}{6}pr + \frac{1}{16}q^2 - \frac{1}{144}\sqrt{-48p^4r + 12p^3q^2 + 384p^2r^2 - 432prq^2 + 81q^4 - 768r^3}} +$
$\frac{1}{6}p$

Lösungen für x erhält man, wenn man die zu beidseitigen Quadraten umgeformte Gleichung verwendet:

$$(x^2 + z)^2 = (2z - p)x^2 + (z^2 - r)$$

Beidseitiges Wurzelziehen und Umformen führt zu der quadratischen Gleichung

$$x^2 \pm \left(\sqrt{2z - p}x + \sqrt{z^2 - r}\right) + z = 0$$

# Lösung der reduzierten Form quart. Gleichungen

Durch beidseitiges Quadrieren, Ausmultiplizieren und Umformen dieser Bedingung erhält man schließlich eine kubische Gleichung der Form

$$z^3 - \frac{p}{2}z^2 - rz + \frac{pr}{2} - \frac{q^2}{8} = 0,$$

mit der durch die Cardanosche Formel bestimmbare Lösung z.

$$z = \sqrt[3]{\frac{1}{216}p^3 - \frac{1}{6}pr + \frac{1}{16}q^2 + \frac{1}{144}\sqrt{-48p^4r + 12p^3q^2 + 384p^2r^2 - 432prq^2 + 81q^4 - 768r^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{216}p^3 - \frac{1}{6}pr + \frac{1}{16}q^2 - \frac{1}{144}\sqrt{-48p^4r + 12p^3q^2 + 384p^2r^2 - 432prq^2 + 81q^4 - 768r^3}} + \frac{1}{6}p$$

Lösungen für x erhält man, wenn man die zu beidseitigen Quadraten umgeformte Gleichung verwendet:

$$(x^2 + z)^2 = (2z - p)x^2 + (z^2 - r)$$

Beidseitiges Wurzelziehen und Umformen führt zu der quadratischen Gleichung

$$x^2 \pm \left(\sqrt{2z - p}x + \sqrt{z^2 - r}\right) + z = 0$$

# Lösung der reduzierten Form quart. Gleichungen

Durch beidseitiges Quadrieren, Ausmultiplizieren und Umformen dieser Bedingung erhält man schließlich eine kubische Gleichung der Form

$$z^3 - \frac{p}{2}z^2 - rz + \frac{pr}{2} - \frac{q^2}{8} = 0,$$

mit der durch die Cardanosche Formel bestimmbare Lösung z.

$$z = \sqrt[3]{\frac{1}{216}p^3 - \frac{1}{6}pr + \frac{1}{16}q^2 + \frac{1}{144}\sqrt{-48p^4r + 12p^3q^2 + 384p^2r^2 - 432prq^2 + 81q^4 - 768r^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{216}p^3 - \frac{1}{6}pr + \frac{1}{16}q^2 - \frac{1}{144}\sqrt{-48p^4r + 12p^3q^2 + 384p^2r^2 - 432prq^2 + 81q^4 - 768r^3}} + \frac{1}{6}p$$

Lösungen für x erhält man, wenn man die zu beidseitigen Quadraten umgeformte Gleichung verwendet:

$$(x^2 + z)^2 = (2z - p)x^2 + (z^2 - r)$$

Beidseitiges Wurzelziehen und Umformen führt zu der quadratischen Gleichung

$$x^2 \pm \left(\sqrt{2z - p}x + \sqrt{z^2 - r}\right) + z = 0$$

# Lösung der reduzierten Form quart. Gleichungen

Wegen den Vorzeichenvarianten erhält man mithilfe der p-q-Formel vier Lösungen:

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}\sqrt{2z-p} \pm \sqrt{-\frac{1}{2}z - \frac{1}{4}p + \sqrt{z^2 - r}}$$

$$x_{3,4} = -\frac{1}{2}\sqrt{2z-p} \pm \sqrt{-\frac{1}{2}z - \frac{1}{4}p - \sqrt{z^2 - r}}$$

Darstellung der Lösung nur in Abhängigkeit von p, q, r siehe Maple x1x2x3x4allgemein.mws

# Quartischer Fall (Allgemein)

Bisher haben wir keine quartischen Gleichungen behandelt, bei denen die Unbekannte x in der dritten Potenz auftaucht.

Wie kann also eine allgemeine Gleichung der Form $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ in eine Gleichung der reduzierten Form $y^4 + py^2 + qy + r = 0$ transformiert werden?

Man substituiert die Unbekannte x durch

$$x = y - \frac{a}{4},$$

wobei sich die entstehenden Terme zur Potenz $y^3$ gegenseitig aufheben:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = y^4 + py^2 + qy + r$$

Dabei sind die Koeffizienten der reduzierten Gleichung mittels polynomialer Ausdrücke berechenbar.

# Quartischer Fall (Allgemein)

Bisher haben wir keine quartischen Gleichungen behandelt, bei denen die Unbekannte x in der dritten Potenz auftaucht.

Wie kann also eine allgemeine Gleichung der Form $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ in eine Gleichung der reduzierten Form $y^4 + py^2 + qy + r = 0$ transformiert werden?

Man substituiert die Unbekannte x durch

$$x = y - \frac{a}{4},$$

wobei sich die entstehenden Terme zur Potenz $y^3$ gegenseitig aufheben:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = y^4 + py^2 + qy + r$$

Dabei sind die Koeffizienten der reduzierten Gleichung mittels polynomialer Ausdrücke berechenbar.

# Quartischer Fall (Allgemein)

Bisher haben wir keine quartischen Gleichungen behandelt, bei denen die Unbekannte x in der dritten Potenz auftaucht.

Wie kann also eine allgemeine Gleichung der Form $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ in eine Gleichung der reduzierten Form $y^4 + py^2 + qy + r = 0$ transformiert werden?

Man substituiert die Unbekannte x durch

$$x = y - \frac{a}{4},$$

wobei sich die entstehenden Terme zur Potenz $y^3$ gegenseitig aufheben:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = y^4 + py^2 + qy + r$$

Dabei sind die Koeffizienten der reduzierten Gleichung mittels polynomialer Ausdrücke berechenbar.

# Art der Lösungen quartischer Gleichungen

Sind alle Koeffizienten reell, lassen sich drei Fallunterscheidungen für die möglichen Lösungen angeben, da sich sich jedes Polynom mit reellen Koeffizienten unabhängig von seinem Grad in lineare und quadratische Faktoren mit reellen Koeffizienten zerlegen lässt. (Fundamentalsatz der Algebra)

- Die Gleichung hat vier reelle Lösungen. Sie zerfällt in vier Linearfaktoren mit reellen Koeffizienten. (A)
- Die Gleichung hat zwei reelle und zwei konjugiert komplexe Lösungen. Sie zerfällt in zwei Linearfaktoren und einen quadratischen Faktor mit reellen Koeffizienten. (B)
- Die Gleichung hat zwei Paare konjugiert komplexer Lösungen. Sie zerfällt in zwei quadratische Faktoren mit reellen Koeffizienten. (C)

# Art der Lösungen quartischer Gleichungen

Sind alle Koeffizienten reell, lassen sich drei Fallunterscheidungen für die möglichen Lösungen angeben, da sich sich jedes Polynom mit reellen Koeffizienten unabhängig von seinem Grad in lineare und quadratische Faktoren mit reellen Koeffizienten zerlegen lässt. (Fundamentalsatz der Algebra)

- Die Gleichung hat vier reelle Lösungen. Sie zerfällt in vier Linearfaktoren mit reellen Koeffizienten. (A)
- Die Gleichung hat zwei reelle und zwei konjugiert komplexe Lösungen. Sie zerfällt in zwei Linearfaktoren und einen quadratischen Faktor mit reellen Koeffizienten. (B)
- Die Gleichung hat zwei Paare konjugiert komplexer Lösungen. Sie zerfällt in zwei quadratische Faktoren mit reellen Koeffizienten. (C)

# Art der Lösungen quartischer Gleichungen

Sind alle Koeffizienten reell, lassen sich drei Fallunterscheidungen für die möglichen Lösungen angeben, da sich sich jedes Polynom mit reellen Koeffizienten unabhängig von seinem Grad in lineare und quadratische Faktoren mit reellen Koeffizienten zerlegen lässt. (Fundamentalsatz der Algebra)

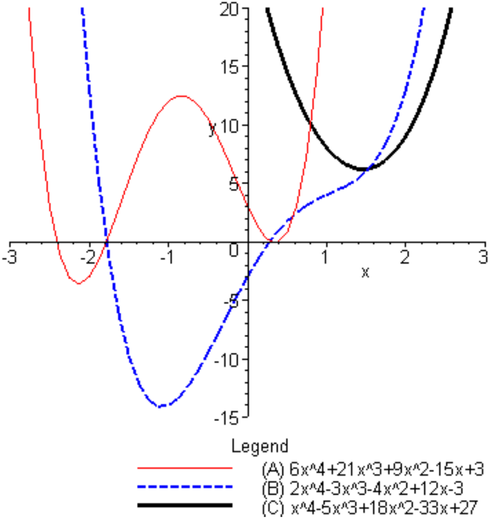
- Die Gleichung hat vier reelle Lösungen. Sie zerfällt in vier Linearfaktoren mit reellen Koeffizienten. (A)
- Die Gleichung hat zwei reelle und zwei konjugiert komplexe Lösungen. Sie zerfällt in zwei Linearfaktoren und einen quadratischen Faktor mit reellen Koeffizienten. (B)
- Die Gleichung hat zwei Paare konjugiert komplexer Lösungen. Sie zerfällt in zwei quadratische Faktoren mit reellen Koeffizienten. (C)

# Art der Lösungen quartischer Gleichungen

Sind alle Koeffizienten reell, lassen sich drei Fallunterscheidungen für die möglichen Lösungen angeben, da sich sich jedes Polynom mit reellen Koeffizienten unabhängig von seinem Grad in lineare und quadratische Faktoren mit reellen Koeffizienten zerlegen lässt. (Fundamentalsatz der Algebra)

- Die Gleichung hat vier reelle Lösungen. Sie zerfällt in vier Linearfaktoren mit reellen Koeffizienten. (A)
- Die Gleichung hat zwei reelle und zwei konjugiert komplexe Lösungen. Sie zerfällt in zwei Linearfaktoren und einen quadratischen Faktor mit reellen Koeffizienten. (B)
- Die Gleichung hat zwei Paare konjugiert komplexer Lösungen. Sie zerfällt in zwei quadratische Faktoren mit reellen Koeffizienten. (C)

# Art der Lösungen quartischer Gleichungen



# Satz von Abel-Ruffini

**Satz von Abel-Ruffini**

Allgemeine Polynome fünften oder höheren Grades sind nicht durch Radikale, d.h. mathematische Ausdrücke, die nur Wurzeln und arithmetische Grundoperationen verwenden, auflösbar.

Der erste Beweis dieses Satzes wurde von Paolo Ruffini (1765-1822) im Jahr 1799 veröffentlicht. Dieser Beweis war jedoch lückenhaft und wurde zudem weitgehend ignoriert. Ein vollständiger Beweis gelang 1824 Niels Henrik Abel (1802-1829). Abel war neben Galois, der Abels Untersuchungen zur Unlösbarkeit von Gleichungen auf spezielle Gleichungen verallgemeinerte (sog. Galoistheorie), ein wichtiger Mitbegründer der Gruppentheorie.

# Satz von Abel-Ruffini

**Satz von Abel-Ruffini**

Allgemeine Polynome fünften oder höheren Grades sind nicht durch Radikale, d.h. mathematische Ausdrücke, die nur Wurzeln und arithmetische Grundoperationen verwenden, auflösbar.

Der erste Beweis dieses Satzes wurde von Paolo Ruffini (1765-1822) im Jahr 1799 veröffentlicht. Dieser Beweis war jedoch lückenhaft und wurde zudem weitgehend ignoriert. Ein vollständiger Beweis gelang 1824 Niels Henrik Abel (1802-1829). Abel war neben Galois, der Abels Untersuchungen zur Unlösbarkeit von Gleichungen auf spezielle Gleichungen verallgemeinerte (sog. Galoistheorie), ein wichtiger Mitbegründer der Gruppentheorie.

# Satz von Abel-Ruffini

**Satz von Abel-Ruffini**

Allgemeine Polynome fünften oder höheren Grades sind nicht durch Radikale, d.h. mathematische Ausdrücke, die nur Wurzeln und arithmetische Grundoperationen verwenden, auflösbar.

Der erste Beweis dieses Satzes wurde von Paolo Ruffini (1765-1822) im Jahr 1799 veröffentlicht. Dieser Beweis war jedoch lückenhaft und wurde zudem weitgehend ignoriert. Ein vollständiger Beweis gelang 1824 Niels Henrik Abel (1802-1829). Abel war neben Galois, der Abels Untersuchungen zur Unlösbarkeit von Gleichungen auf spezielle Gleichungen verallgemeinerte (sog. Galoistheorie), ein wichtiger Mitbegründer der Gruppentheorie.

# Idee von Galois

Eine Verallgemeinerung von Abels Ansätzen, die auch für spezielle Gleichungen anwendbar ist, fand wenige Jahre später der damals erst zwanzigjährige **Evariste Galois (1811-1832)**. Am Vorabend eines für ihn tödlich verlaufenden Duells, fasste er seine Ergebnisse in einem Brief zusammen. Darin enthalten sind Kriterien, die es erlauben, jede einzelne Gleichung darauf zu untersuchen, ob ihre Lösungen mit Hilfe von Wurzelausdrücken dargestellt werden können oder nicht.

So können beispielsweise die Lösungen der Gleichung fünften Grades

$$x^5 - x - 1 = 0$$

nicht durch geschachtelte Wurzelausdrücke dargestellt werden, hingegen ist bei der Gleichung $x^5 + 15x - 44 = 0$ zum Beispiel

$$x_1 = \sqrt[5]{-1+\sqrt{2}} + \sqrt[5]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[5]{3-2\sqrt{2}} + \sqrt[5]{-1-\sqrt{2}}$$

eine Lösung.

# Idee von Galois

Eine Verallgemeinerung von Abels Ansätzen, die auch für spezielle Gleichungen anwendbar ist, fand wenige Jahre später der damals erst zwanzigjährige **Evariste Galois (1811-1832)**. Am Vorabend eines für ihn tödlich verlaufenden Duells, fasste er seine Ergebnisse in einem Brief zusammen. Darin enthalten sind Kriterien, die es erlauben, jede einzelne Gleichung darauf zu untersuchen, ob ihre Lösungen mit Hilfe von Wurzelausdrücken dargestellt werden können oder nicht.

So können beispielsweise die Lösungen der Gleichung fünften Grades

$$x^5 - x - 1 = 0$$

nicht durch geschachtelte Wurzelausdrücke dargestellt werden, hingegen ist bei der Gleichung $x^5 + 15x - 44 = 0$ zum Beispiel

$$x_1 = \sqrt[5]{-1+\sqrt{2}} + \sqrt[5]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[5]{3-2\sqrt{2}} + \sqrt[5]{-1-\sqrt{2}}$$

eine Lösung.

# Idee von Galois

Eine Verallgemeinerung von Abels Ansätzen, die auch für spezielle Gleichungen anwendbar ist, fand wenige Jahre später der damals erst zwanzigjährige **Evariste Galois (1811-1832)**. Am Vorabend eines für ihn tödlich verlaufenden Duells, fasste er seine Ergebnisse in einem Brief zusammen. Darin enthalten sind Kriterien, die es erlauben, jede einzelne Gleichung darauf zu untersuchen, ob ihre Lösungen mit Hilfe von Wurzelausdrücken dargestellt werden können oder nicht.
So können beispielsweise die Lösungen der Gleichung fünften Grades

$$x^5 - x - 1 = 0$$

nicht durch geschachtelte Wurzelausdrücke dargestellt werden, hingegen ist bei der Gleichung $x^5 + 15x - 44 = 0$ zum Beispiel

$$x_1 = \sqrt[5]{-1+\sqrt{2}} + \sqrt[5]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[5]{3-2\sqrt{2}} + \sqrt[5]{-1-\sqrt{2}}$$

eine Lösung.

# Idee von Galois

Eine Verallgemeinerung von Abels Ansätzen, die auch für spezielle Gleichungen anwendbar ist, fand wenige Jahre später der damals erst zwanzigjährige **Evariste Galois (1811-1832)**. Am Vorabend eines für ihn tödlich verlaufenden Duells, fasste er seine Ergebnisse in einem Brief zusammen. Darin enthalten sind Kriterien, die es erlauben, jede einzelne Gleichung darauf zu untersuchen, ob ihre Lösungen mit Hilfe von Wurzelausdrücken dargestellt werden können oder nicht.
So können beispielsweise die Lösungen der Gleichung fünften Grades

$$x^5 - x - 1 = 0$$

nicht durch geschachtelte Wurzelausdrücke dargestellt werden, hingegen ist bei der Gleichung $x^5 + 15x - 44 = 0$ zum Beispiel

$$x_1 = \sqrt[5]{-1+\sqrt{2}} + \sqrt[5]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[5]{3-2\sqrt{2}} + \sqrt[5]{-1-\sqrt{2}}$$

eine Lösung.

# Idee von Galois

Unter Verwendung der allgemeineren Resultate der **Galoistheorie** müssen zum Beweis des Satzes von Abel-Ruffini nur zwei Punkte gezeigt werden:

- Die *allgemeine Gleichung* fünften Grades (d.h. die Gleichung mit Variablen als Koeffizienten) besitzt als Galoisgruppe die symmetrische Gruppe $S_5$
- Die symmetrische Gruppe $S_5$ ist nicht auflösbar.

**Hauptsatz der Galoistheorie:**

Jede Gleichungsauflösung entspricht ineinander verschachtelten Zahlenbereichen (die durch die Koeffizienten und die Lösungen $x_1, x_2, \ldots$ gebildet werden) und diese lassen sich allesamt durch eine Analyse der Galois-Gruppe auffinden. Daher beantwortet bereits eine solche Analyse der Galois-Gruppe die Frage danach, ob Lösungen in Form verschachtelter Wurzelausdrücke dargestellt werden können.

# Idee von Galois

Unter Verwendung der allgemeineren Resultate der **Galoistheorie** müssen zum Beweis des Satzes von Abel-Ruffini nur zwei Punkte gezeigt werden:

- Die *allgemeine Gleichung* fünften Grades (d.h. die Gleichung mit Variablen als Koeffizienten) besitzt als Galoisgruppe die symmetrische Gruppe $S_5$
- Die symmetrische Gruppe $S_5$ ist nicht auflösbar.

**Hauptsatz der Galoistheorie:**

Jede Gleichungsauflösung entspricht ineinander verschachtelten Zahlenbereichen (die durch die Koeffizienten und die Lösungen $x_1, x_2, \ldots$ gebildet werden) und diese lassen sich allesamt durch eine Analyse der Galois-Gruppe auffinden. Daher beantwortet bereits eine solche Analyse der Galois-Gruppe die Frage danach, ob Lösungen in Form verschachtelter Wurzelausdrücke dargestellt werden können.

# Idee von Galois

Unter Verwendung der allgemeineren Resultate der **Galoistheorie** müssen zum Beweis des Satzes von Abel-Ruffini nur zwei Punkte gezeigt werden:

- Die *allgemeine Gleichung* fünften Grades (d.h. die Gleichung mit Variablen als Koeffizienten) besitzt als Galoisgruppe die symmetrische Gruppe $S_5$
- Die symmetrische Gruppe $S_5$ ist nicht auflösbar.

**Hauptsatz der Galoistheorie:**

Jede Gleichungsauflösung entspricht ineinander verschachtelten Zahlenbereichen (die durch die Koeffizienten und die Lösungen $x_1, x_2, \ldots$ gebildet werden) und diese lassen sich allesamt durch eine Analyse der Galois-Gruppe auffinden. Daher beantwortet bereits eine solche Analyse der Galois-Gruppe die Frage danach, ob Lösungen in Form verschachtelter Wurzelausdrücke dargestellt werden können.

# Idee von Galois

Unter Verwendung der allgemeineren Resultate der **Galoistheorie** müssen zum Beweis des Satzes von Abel-Ruffini nur zwei Punkte gezeigt werden:

- Die *allgemeine Gleichung* fünften Grades (d.h. die Gleichung mit Variablen als Koeffizienten) besitzt als Galoisgruppe die symmetrische Gruppe $S_5$
- Die symmetrische Gruppe $S_5$ ist nicht auflösbar.

**Hauptsatz der Galoistheorie:**

Jede Gleichungsauflösung entspricht ineinander verschachtelten Zahlenbereichen (die durch die Koeffizienten und die Lösungen $x_1, x_2, \ldots$ gebildet werden) und diese lassen sich allesamt durch eine Analyse der Galois-Gruppe auffinden. Daher beantwortet bereits eine solche Analyse der Galois-Gruppe die Frage danach, ob Lösungen in Form verschachtelter Wurzelausdrücke dargestellt werden können.

# Idee von Galois

## Symmetrische Gruppe

Die **symmetrische Gruppe** $S_n$ ist eine Gruppe, die aus allen Permutationen einer Menge mit n Elementen besteht. Gruppenoperation ist die Verkettung der Permutationen. Das neutrale Element ist die Identität id.

## Definition

Eine Gruppe heißt **auflösbar**, wenn es eine absteigende Folge $G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \ldots \triangleright G_n = 1$ von Normalteilern gibt, deren Quotienten $G_k/G_{k+1}$ (Faktorgruppen) abelsch sind.

Als **Normalteiler**(oder normale Untergruppe) bezeichnet man in der Gruppentheorie eine Untergruppe N einer Gruppe G, wenn für alle $a \in G$ und $b \in N$ gilt: $aba^{-1} \in N$. Notation: $N \triangleleft G$. D.h. für jedes Element $a \in G$ ist die linke Nebenklasse von $N$ gleich der rechten, also $aN = Na$.

# Idee von Galois

## Symmetrische Gruppe

Die **symmetrische Gruppe** $S_n$ ist eine Gruppe, die aus allen Permutationen einer Menge mit n Elementen besteht. Gruppenoperation ist die Verkettung der Permutationen. Das neutrale Element ist die Identität id.

## Definition

Eine Gruppe heißt **auflösbar**, wenn es eine absteigende Folge $G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \ldots \triangleright G_n = 1$ von Normalteilern gibt, deren Quotienten $G_k/G_{k+1}$ (Faktorgruppen) abelsch sind.

Als **Normalteiler**(oder normale Untergruppe) bezeichnet man in der Gruppentheorie eine Untergruppe N einer Gruppe G, wenn für alle $a \in G$ und $b \in N$ gilt: $aba^{-1} \in N$. Notation: $N \triangleleft G$. D.h. für jedes Element $a \in G$ ist die linke Nebenklasse von $N$ gleich der rechten, also $aN = Na$.

# Idee von Galois

## Symmetrische Gruppe

Die **symmetrische Gruppe** $S_n$ ist eine Gruppe, die aus allen Permutationen einer Menge mit n Elementen besteht. Gruppenoperation ist die Verkettung der Permutationen. Das neutrale Element ist die Identität id.

## Definition

Eine Gruppe heißt **auflösbar**, wenn es eine absteigende Folge $G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \ldots \triangleright G_n = 1$ von Normalteilern gibt, deren Quotienten $G_k/G_{k+1}$ (Faktorgruppen) abelsch sind.

Als **Normalteiler**(oder normale Untergruppe) bezeichnet man in der Gruppentheorie eine Untergruppe N einer Gruppe G, wenn für alle $a \in G$ und $b \in N$ gilt: $aba^{-1} \in N$. Notation: $N \triangleleft G$. D.h. für jedes Element $a \in G$ ist die linke Nebenklasse von $N$ gleich der rechten, also $aN = Na$.

# Numerik

In der numerischen Praxis besitzen heute die Formeln Cardanos kaum noch Bedeutung. In einem Zeitalter, in dem die Rechenleistung von Computern de facto unbegrenzt zur Verfügung steht, ist eine explizite Formel (und die "Wurzeltürme", wie sie etwa bei den quartischen Gleichungen auftauchen) bei praktischen Anwendungen nämlich entbehrlich, da es bei solchen völlig reicht, die Lösungen durch numerische Verfahren näherungsweise zu bestimmen.
Im Folgenden sollen die Wichtigsten dieser Verfahren kurz erläutert werden.

# Bisektion

Gesucht ist die Nullstelle einer streng monoton steigenden Funktion $f$ im Intervall $[a, b]$. Diese soll mit einer Genauigkeit $\varepsilon$ angegeben werden. (Teilintervall von $[a, b]$, das die Nullstelle enthält hat höchstens die Länge $\varepsilon$.)

Idee: Abschätzung der Lage einer Nullstelle mit ZW-Satz. Anschließend Halbierung des Intervalls und Modifizierung der Intervallgrenzen (Funktionswerte der Intervallgrenzen müssen unterschiedliche VZ haben).

Dies führt zu folgendem Algorithmus:
1. Setze $l = a$ und $r = b$.
2. Teste, ob $[l, r]$ eine Nullstelle enthält. Wenn nicht: Abbruch.
3. Teste, ob $r - l < \varepsilon$ ist. Wenn ja, haben wir unser Intervall gefunden!
4. Sonst teile $[l, r]$ in der Mitte und setze das Verfahren mit beiden Teilintervallen rekursiv bei 2. fort.

# Bisektion

Gesucht ist die Nullstelle einer streng monoton steigenden Funktion $f$ im Intervall $[a, b]$. Diese soll mit einer Genauigkeit $\varepsilon$ angegeben werden. (Teilintervall von $[a, b]$, das die Nullstelle enthält hat höchstens die Länge $\varepsilon$.)
Idee: Abschätzung der Lage einer Nullstelle mit ZW-Satz. Anschließend Halbierung des Intervalls und Modifizierung der Intervallgrenzen (Funktionswerte der Intervallgrenzen müssen unterschiedliche VZ haben).

Dies führt zu folgendem Algorithmus:
1. Setze $l = a$ und $r = b$.
2. Teste, ob $[l, r]$ eine Nullstelle enthält. Wenn nicht: Abbruch.
3. Teste, ob $r - l < \varepsilon$ ist. Wenn ja, haben wir unser Intervall gefunden!
4. Sonst teile $[l, r]$ in der Mitte und setze das Verfahren mit beiden Teilintervallen rekursiv bei 2. fort.

# Bisektion

Gesucht ist die Nullstelle einer streng monoton steigenden Funktion $f$ im Intervall $[a, b]$. Diese soll mit einer Genauigkeit $\varepsilon$ angegeben werden. (Teilintervall von $[a, b]$, das die Nullstelle enthält hat höchstens die Länge $\varepsilon$.)
Idee: Abschätzung der Lage einer Nullstelle mit ZW-Satz. Anschließend Halbierung des Intervalls und Modifizierung der Intervallgrenzen (Funktionswerte der Intervallgrenzen müssen unterschiedliche VZ haben).

Dies führt zu folgendem Algorithmus:
1. Setze $l = a$ und $r = b$.
2. Teste, ob $[l, r]$ eine Nullstelle enthält. Wenn nicht: Abbruch.
3. Teste, ob $r - l < \varepsilon$ ist. Wenn ja, haben wir unser Intervall gefunden!
4. Sonst teile $[l, r]$ in der Mitte und setze das Verfahren mit beiden Teilintervallen rekursiv bei 2. fort.

# Newton-Verfahren

Idee: Tangente an den Graphen im Startwert $x_0$ anlegen; Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse ist neuer Startwert, der bei geeigneter Startwert-Wahl immer näher an der Nullstelle liegt.

**Newton Verfahren**

Es sei $f$ eine differenzierbare Funktion und $x_0$ ein beliebiger Startwert. Man definiere eine Folge von Näherungen $(x_n)$ durch
$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, falls $f'(x_n) \neq 0$.

# Newton-Verfahren

Idee: Tangente an den Graphen im Startwert $x_0$ anlegen; Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse ist neuer Startwert, der bei geeigneter Startwert-Wahl immer näher an der Nullstelle liegt.

## Newton Verfahren

Es sei $f$ eine differenzierbare Funktion und $x_0$ ein beliebiger Startwert. Man definiere eine Folge von Näherungen $(x_n)$ durch
$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, falls $f'(x_n) \neq 0$.

# Sekantenverfahren

Zwischen zwei Punkten der Funktion wird eine Sekante gelegt. Deren Schnittpunkt mit der x-Achse wird als verbesserter Startwert für die Iteration verwendet. Mit dem neuen Wert und einem der beiden letzten alten Werte (derjenige, dessen Funktionswert ein anderes Vorzeichen als der des neuen x-Wertes hat) wird dieser Schritt wiederholt.

# Horner-Schema

Das Horner-Schema ist eine Rechenvorschrift zum Auswerten von Polynomen an einer Stelle $x_0$.

$$p(x) = a_n x^n + \cdot \ldots \cdot a_1 x + a_0 = (((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \ldots + a_1)x + a_0$$

Vorteile:

- Beschleunigung der Berechnung indem überflüssige Berechnungen bei den Potenzen vermieden werden.
- Minimierung des Rechenfehlers bei Auswertung durch Gleitkommaoperationen.

# Horner-Schema

Das Horner-Schema ist eine Rechenvorschrift zum Auswerten von Polynomen an einer Stelle $x_0$.

$$p(x) = a_n x^n + \cdot \ldots \cdot a_1 x + a_0 = (((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \ldots + a_1)x + a_0$$

Vorteile:

- Beschleunigung der Berechnung indem überflüssige Berechnungen bei den Potenzen vermieden werden.
- Minimierung des Rechenfehlers bei Auswertung durch Gleitkommaoperationen.

# Horner-Schema

Das Horner-Schema ist eine Rechenvorschrift zum Auswerten von Polynomen an einer Stelle $x_0$.

$$p(x) = a_n x^n + \cdot \ldots \cdot a_1 x + a_0 = (((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \ldots + a_1)x + a_0$$

Vorteile:

- Beschleunigung der Berechnung indem überflüssige Berechnungen bei den Potenzen vermieden werden.
- Minimierung des Rechenfehlers bei Auswertung durch Gleitkommaoperationen.